# Wprowadzenie do kombinatoryki

http://www.matemaks.pl/kombinatoryka.html

Kombinatoryka jest działem matematyki, który pomaga odpowiedzieć na pytania typu:
*"ile jest możliwych wyników w rzucie monetą?",*
*"Na ile sposobów możemy wybrać delegację dwuosobową z klasy 28 osobowej?",* itp.
Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami.
Nie trzeba jednak pamiętać tych wszystkich wzorów, aby szybko i skutecznie rozwiązywać zadania z kombinatoryki.
Do rozwiązania większości zadań w zupełności wystarcza **reguła mnożenia** i wzór na **kombinację**.

## Reguła mnożenia

Reguła mnożenia przydaje się podczas rozwiązywania wielu zadań z kombinatoryki.

Przykłady:

**Przykład 1.**
Rzucamy trzy razy monetą. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?
Rozwiązanie:
Możliwe wyniki to np.: (*Orzeł*,*Orzeł*,*Reszka*), (*O*,*R*,*R*), (*R*,*O*,*R*), (*R*,*R*,*R*)...
Zatem:
W **I rzucie** może wypaść orzeł lub reszka, czyli są **2** możliwości.
W **II rzucie** również może wypaść orzeł lub reszka, czyli są **2** możliwości.
W **III rzucie** również może wypaść orzeł lub reszka, czyli są **2** możliwości.

| W **I rzucie** są 2 możliwości | **i** | W **II rzucie** są 2 możliwości | **i** | W **III rzucie** są 2 możliwości |
|---|---|---|---|---|

Reguła mnożenia mówi, że w takiej sytuacji mamy:
$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ możliwości.

W regule mnożenia zawsze zamieniamy spójnik "**i**" na mnożenie.

**Przykład 2.**
Rzucamy 10 razy monetą. Ile jest możliwych wyników?
Rozwiązanie:
W każdym rzucie możemy otrzymać 2 wyniki: *Orzeł* albo *Reszka*. Powiemy:
W pierwszym rzucie mamy 2 możliwości i w drugim rzucie mamy 2 możliwości i w trzecim rzucie mamy 2 możliwości... i w dziesiątym rzucie mamy 2 możliwości.
Zatem łącznie mamy:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ (10 razy) $= 2^{10}$
możliwości.

**Przykład 3.**
Rzucamy 3 razy sześcienną kostką do gry. Ile jest możliwych wyników?
Rozwiązanie:

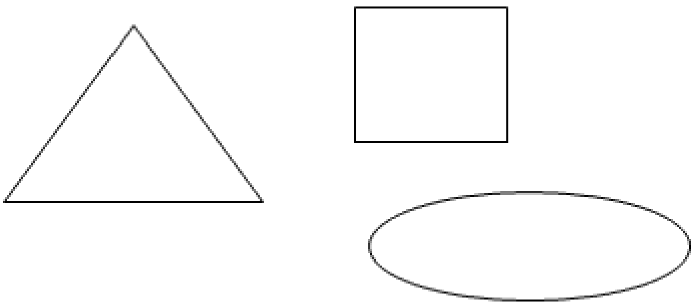
W każdym rzucie możemy otrzymać jeden z sześciu wyników.
W pierwszym rzucie mamy 6 możliwości i w drugim rzucie mamy 6 możliwości
i w trzecim rzucie mamy 6 możliwości.
Zatem łącznie mamy:
$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$
możliwości.

**Przykład 4.**
Rzucamy 5 razy sześcienną kostką do gry. Ile jest możliwych wyników?
Rozwiązanie:
W każdym rzucie możemy otrzymać jeden z sześciu wyników.
Zatem łącznie mamy:
$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$
możliwości.

**Zadanie 5.**
Ze wsi $A$ do wsi $B$ prowadzi 5 ścieżek przez las.
Na ile sposobów można odbyć spacer $A - B - A$
tak, aby spacer ze wsi $B$ do wsi $A$ odbyć inną ścieżką niż ze wsi $A$ do wsi $B$?
**A.** $5^4$ **B.** $5+4$ **C.** $4^5$ **D.** $5 \cdot 4$

Z A do B – 5 ścieżek,
w drodze powrotnej – jedna ścieżka mniej (inna niż z A do B), czyli 5-1=4
5*4 = 20

**Zadanie 6.**
Na rysunku dany jest kwadrat, trójkąt i elipsa. Mamy również do dyspozycji 8 kolorów farb.



Na ile różnych sposobów można pomalować wszystkie trzy figury tymi ośmioma kolorami,
tak aby każda figura była w innym kolorze?

**A.** 27 **B.** 336 **C.** 512 **D.** $8^8$

Trójkąt - 8 możliwości Kwadrat – 7 możliwości Elipsa – 6 możliwości
8*7*6 = 336

**Zadanie 7.**
Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny.
Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego

koloru.
Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w **10** kolorach, jest równa

**A.** 100 **B.** 99 **C.** 90 **D.** 19

Pasy zewnętrzne (tego samego koloru) na 10sposobów, pas wewnętrzny: 10 – 1 = 9
10*9 = 90

**Zadanie 8.**
Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, których obie cyfry są mniejsze od 5 jest
**A.** 16 **B.** 20 **C.** 25 **D.** 30

Na I miejscu, {1, 2, 3, 4} Na II miejscu: {0, 1, 2, 3, 4} 4*5 = 20

**Zadanie 9.**
Liczba sposobów, na jakie Ala i Bartek mogą usiąść na dwóch spośród pięciu miejsc w kinie, jest równa
**A.** 25 **B.** 20 **C.** 15 **D.** 12

Reguła mnożenia
Ala – 5 możliwości, Bartek – już tylko 4: 5*4=20

**Zadanie 10.**
Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych takich,
że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.

N: {1, 3, 5, 7, 9} P {0.2, 4, 6, 8}
Możliwości:
1) **N**, P, P, P 2) P, **N**, P, P 3) P, P, **N,** P 4) P, P, P, **N**

1) Na I miejscu N: - 5, na II – 5, na III – 5, na IV – 5
2) Na II nieparzyste, na I parzyste: na I - 4 (0 nie może być), na II – 5 sposobów: 4*5*5*5
3) Na III nieparzyste: 4*5*5*5 (na I parzyste)
4) Na IV nieparzyste: 4*5*5*5 (na I parzyste)
5^4 + 3*4*5^3 = 5^3*(5+12) = 125*17 = 2125

**Zadanie 11.**
Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 15 lub 20?

I Podzielne przez 15: 1 5, 30, 45, 60, 75, 90 → 6 liczb
II Podzielne przez 20: 20, 40, ~~60~~, 80 → 4-1 = 3
Wykreślamy, które się powtarzają, czyli 60 z II → 3

6+3 = 9

**Zadanie 12.**
Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych,
w których cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry jedności?

Setki dziesiątki jedności
[ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}] [ {9} ] [ {0, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7}]
Zaczynamy od cyfr jedności - od 0 do 7 → cyfra dziesiątek maks. 9 –
Cyfra 10-tek – 9 – czyli jedna
Cyfra setek – od 1 do 9 (nie może być 0)
9*1*8 = 72

**Zadanie 13.**
Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których obie cyfry są parzyste?
**A.** 16 **B.** 20 **C.** 24 **D.** 25

[D] [J] – dziesiątki, jedności, D i J parzyste
[{2, 4, 6, 8}] [{0, 2, 4, 6, 8}]
Iloczyn cyfr jakie możemy wpisać w I pole i II pole:
W I polu cyfry parzyste {2, 4, 6, 8} – bez zera → 4 cyfry
W II polu cyfry parzyste {0, 2, 4, 6, 8} → 5 cyfr
4*5= 20

**Zadanie 14.**
Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których obie cyfry są nieparzyste?
**A.** 16 **B.** 20 **C.** 24 **D.** 25

5 * 5 = 25

**Zadanie 15.**
Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, w których wszystkie trzy cyfry są parzyste?

**A.** 40 **B.** 64 **C.** 100 **D.** 125

## Silnia

**Definicja 1.**
**Silnia** liczby naturalnej ***n*** - to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do *n*.
Silnię liczby naturalnej *n* oznaczamy symbolem ***n!*** (czytamy *en silnia*).
Mamy zatem:
$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$$

**Przykład 1.**
a)
$3!=1\cdot 2\cdot 3=6$
b)
$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

c)
$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$
d)
$6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$
e)
$10!=1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 9\cdot 10=3628800$
f)
$17!=1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 16\cdot 17=355687428096000$

**Po co jest ta silnia?**
Symbol silni pozwala w prosty i krótki sposób zapisywać długie iloczyny liczb.
Jak widać na powyższym przykładzie - już dla liczby **17!** jej zapis w systemie dziesiętnym składa się aż z **15** cyfr.
Okazuje się, że liczba **100!** zapisana w systemie dziesiętnym składa się już ze **157** cyfr!
Zapisanie liczby przy wykorzystaniu silni jest korzystne również dlatego,
że daje nam informację z jakich czynników składa się dana liczba.
Znajomość takiego rozkładu jest szczególnie przydatna przy skracaniu ułamków
(gdy w liczniku i mianowniku ułamka występują silnie).

## Zadania z silni

**Zadanie 1.** Oblicz:

1. $4! - 2! \cdot 3! = 4! - 2! \cdot 3! = 24 - 2 \cdot 6 = 24 - 12 = 12$
2. $5! - 2! \cdot 4! = 5! - 2! \cdot 4! = 120 - 2 \cdot 24 = 120 - 48 = 72$

3. $10!8!\cdot 2!$
W tym przykładzie występują już trochę większe liczby,
zatem nie opłaca się liczyć ile dokładnie wynosi np. 10!.
Łatwiej będzie skrócić wspólne czynniki z licznika i mianownika.
Zauważmy najpierw, że:
$$10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 8!\cdot 9\cdot 10$$
Zatem:
$$\frac{10!}{8!\cdot 2!} = \frac{\cancel{8!}\cdot 9\cdot 10}{\cancel{8!}\cdot 2} = \frac{9\cdot 10}{2} = 9\cdot 5 = 45$$

4. $12!10!\cdot 4!$
W tym przykładzie skrócimy wspólne czynniki z licznika oraz mianownika.
Zauważmy najpierw, że:

$$\frac{12!}{10!\cdot 4!} = \frac{\cancel{10!}\cdot 11\cdot 12}{\cancel{10!}\cdot 4!} = \frac{11\cdot 12}{4!} = \frac{11\cdot \cancel{12}}{\underset{2}{\cancel{24}}} = \frac{11}{2}$$

5. $9!\cdot 7!(6!)_3$
Podobnie jak w przykładach poprzednich - skrócimy wspólne czynniki z licznika i mianownika.

Zauważmy najpierw, że:

$$9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$$

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 6! \cdot 7$$

$$(6!)^3 = 6! \cdot 6! \cdot 6!$$

6. $(9!)_3 10! \cdot (8!)_2$

W tym przykładzie również skrócimy wspólne czynniki z licznika i mianownika.
Wcześniej będziemy musieli jednak "sprowadzić" wszystkie silnie do najmniejszej, czyli do 8!.
Zauważmy, że:

$$9! = 8! \cdot 9$$

$$10! = 8! \cdot 9 \cdot 10$$

W związku z tym podstawiamy i skracamy:

$$\frac{(8! \cdot 9)^3}{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot (8!)^2} = \frac{(8!)^3 \cdot 9^3}{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot (8!)^2} = \frac{\cancel{(8!)^3} \cdot 9^3}{9 \cdot 10 \cdot \cancel{(8!)^3}} = \frac{9^3}{9 \cdot 10} = \frac{9^2}{10} = \frac{81}{10}$$

## Kombinacja

http://www.matemaks.pl/kombinacja.html

**Kombinacja** pozwala policzyć na ile sposobów można wybrać $\boldsymbol{k}$ elementów
z $\boldsymbol{n}$ -elementowego zbioru.

Wzór na kombinację jest następujący:

$C_n^k = n! / ( k!(n-k)! )$

Wpisz tutaj równanie.

$C_n^k = \binom{n}{k} = = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$

Kombinację zapisujemy krótko za pomocą **symbolu Newtona:**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

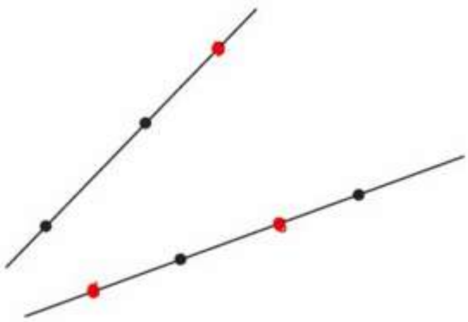
**Przykład 1.**
Na ile sposobów można wybrać 2 osoby w klasie 30 osobowej?
Rozwiązanie:
$C_{30}^2 = \binom{30}{2} = 30! / (2!(30-2)!) = 30! / (2 \cdot 28!) = 29 \cdot 30 / 2 = 15 \cdot 29 = 435$
Odpowiedź: Dwie osoby można wybrać w klasie 30 osobowej na 435 sposobów.

**Przykład 2.**
Na ile sposobów można wybrać 3 zawodników w drużynie 12 osobowej?
Rozwiązanie:
$C_{12}^3 = \binom{12}{3} = 12! / (3!(12-3)!) = 12! / 6 \cdot 9! = 10 \cdot 11 \cdot 12 / 6 = 10 \cdot 11 \cdot 2 = 220$

Odpowiedź: Trzech zawodników w drużynie 12 osobowej można wybrać na 220 sposobów.

**Zadanie 3.**
Na jednej prostej zaznaczono **3** punkty, a na drugiej **4** punkty.
Ile jest wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są trzy spośród zaznaczonych punktów?

Rozwiązanie



Można wybrać $k$ elementów spośród $n$ elementów na $\binom{n}{k}$ sposobów.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Na dolnej prostej mamy możliwość wyboru 2 punktów (podstawa trójkąta) z 4 punktów a na górnej 1 punkt z 3 (wierzchołek trójkąta)
lub na górnej 2 punkty (podstawa) z 3, a na dolnej 1 punkt (wierzchołek) z 4 możliwych

$C_4^2$ * $C_3^1$ + $C_3^2$ * $C_4^1$ = 4!/ (2!*(4-2)!) * 3!/(2!*1!) + 3!/(2!*1!) * 4!/(1!*3!) = 4!/2*2)*3 + 3*4 = 18 + 12 = 30

## Permutacja

**Permutacja zbioru *n* -elementowego** - to dowolny ***n*** -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.
Liczbę permutacji zbioru *n* -elementowego możemy obliczyć ze wzoru:
**$P_n=n!$**

**Przykład 1.**
Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce?
Rozwiązanie:
Obliczmy liczbę permutacji zbioru 5-elementowego:
$P_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$
Czyli pięć osób można ustawić w kolejce na 120 sposobów.

**Przykład 2.**
Ile liczb można utworzyć z cyfr: 1,2,3,4,5,6,7?
Rozwiązanie:
Obliczmy liczbę permutacji zbioru 7-elementowego:
$P_7=7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$
Czyli możemy utworzyć 5040 liczb.

**Przykład 3.**
Na ile sposobów można ustawić na półce **7** książek formatu A5 oraz **6** książek formatu A4, aby nie rozdzielić ich wymiarowo?
Rozwiązanie:
Książki formatu A5 muszą stać obok siebie i możemy je ustawić na 7! sposobów.
Podobnie - książki formatu A4 muszą stać obok siebie i możemy je ustawić na 6! sposobów.
Wszystkie książki na półce możemy jednak ustawić na 2 sposoby
- albo od większych do mniejszych, albo od mniejszych do większych.
Zatem wszystkich możliwości mamy:
$2 \cdot 6! \cdot 7!$

## Wariacja z powtórzeniami

Przyjmijmy, że mamy dany zbiór elementów (np. zbiór liter).
Wariacja z powtórzeniami pozwala na utworzenie ciągu z elementów tego zbioru, z tym, że dopuszcza powtarzanie elementów.
Wzór na wariację z powtórzeniami jest następujący:
$\mathbf{Wn^k = n^k}$

**Przykład 1.**
Ile słów pięcioliterowych (nawet tych bezsensownych) można utworzyć z liter $\{A,B,C\}$?
Rozwiązanie:
Przykładami taki słów są: *AAAAA, AABCA, CBCBB*. Na każde z 5 miejsc możemy wybrać jedną z 3 liter, zatem wszystkich możliwości mamy:
$3^5=243$
Odpowiedź: Można utworzyć 243 wyrazy.

**Przykład 2.**
Ile słów dwuliterowych (nawet tych bezsensownych) można utworzyć z liter $\{A,B,C,D\}$?
Rozwiązanie:
Przykładami taki słów są: *AA, DC, CD*. Na każde z 2 miejsc możemy wybrać jedną z 4 liter, zatem wszystkich możliwości mamy:
$4^2=16$
Odpowiedź: Można utworzyć 16 wyrazów.

# Wariacja bez powtórzeń

Przyjmijmy, że mamy dany zbiór elementów (np. zbiór liter).
Wariacja bez powtórzeń pozwala na utworzenie ciągu z elementów tego zbioru, z tym, że nie dopuszcza powtarzania elementów.

Wzór na wariację bez powtórzeń jest następujący:
$\mathbf{Vn^k = n!/(n-k)!}$

**Przykład 1.**
Ile istnieje czterocyfrowych PIN-kodów składających się z różnych cyfr?

Rozwiązanie:
Mamy do dyspozycji 10 cyfr: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.
Przykładowymi kodami o różnych cyfrach są: 1234, 0189, 9734. Wszystkich takich wariacji bez powtórzeń jest:
$10!/ 6!=7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=5040$
Odpowiedź: Istnieje 5040 czterocyfrowych kodów o różnych cyfrach.