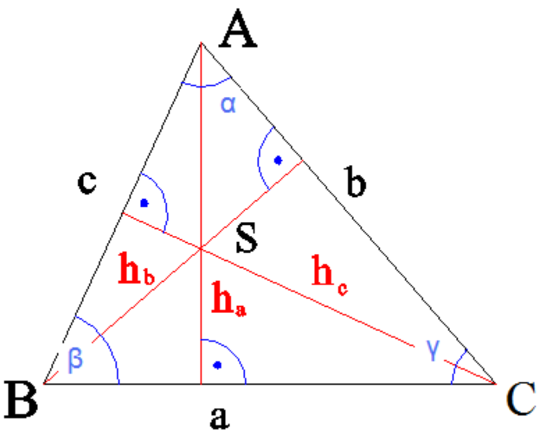
Wielokąty na płaszczyźnie – obliczenia z zastosowaniem trygonometrii

Wielokąt wypukły – miara każdego kąt wewnętrznego jest mniejsza od 180^o.
Liczba przekątnych: $n*(n-2)$
Suma kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego o **n** wierzchołkach **= $(n-2)*180^o$.**
Wielokąty foremne: trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny, sześciokąt foremny …
Każdy trójkąt jest wielokątem wypukłym.

Trójkąty

Trójkąt dowolny



Trójkąt dowolny
a, b, c - długości boków trójkąta
ha, hb, hc - długości wysokości trójkąta,
poprowadzonych odpowiednio na boki a, b, c

Pole P:
P = 1/2 * a * ha
P = 1/2 * b * hb
P = 1/2 * c * hc

P = 1/2 * b*c * sin α
P = 1/2 * a*c * sin β
P = 1/2 * a*b * sin γ

Obwód L = a + b + c

Pole trójkąta ze współrzędnych
P = ½ * [xB – xA) * (yC – yA) – (xC – xA) * (yB – yA)]

P = ½ * (x1*y2+x2*y3+x3*y1-x3*y2-x1*y3-x2*y1)

Suma kątów wewnętrznych trójkąta: $\alpha+\beta+\gamma = 180^0 = 200^g = 2\pi$ [rad]

Pole trójkąta:

P = ½ * bok * wysokość (opuszczona na bok)
$P = ½ * a * h_a = ½ * b * h_b = ½ * c * h_c$ połowa iloczynu podstawy i wysokości

Pole trójkąta = ½ * bok_1 * bok_2 * sin kąta (między tymi bokami)
P = ½ * b * c * sin α = ½ * a * c * sin β = ½ * a * b * sin γ połowa iloczynu boków i sinusa kąta między tymi bokami

Pole trójkąta ze współrzędnych jego wierzchołków

1) Na podstawie przyrostów współrzędnych

Oznaczenia: Δx(PK), Δy(PK) – różnice współrzędnych – przyrosty od punktu P do K – współrzędne wektora PK
P = ½ * [xB – xA) * (yC – yA) – (xC – xA) * (yB – yA)]

2) Bezpośrednio ze współrzędnych

2P = | x1 y1 1 |

| x2 y2 1 |
| x3 y3 1 |

P = ½ * (x1*y2 + x2*y3 + x3*y1 - x3*y2 - x1*y3 - x2*y1)

Pole trójkąta wyznaczonego przez 2 wektory

$P = \frac{1}{2} \cdot |(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x)|$

Obliczenie pola trójkąta, gdy dane 3 boki

Wzór Herona

S = √(p*(p-a)*(p-b)*(p-c)) ; gdzie p = ½ * (a + b + c) – połowa obwodu trójkąta

P = p * r = **½(a+b+c) * r** - r – promień okręgu wpisanego (przecięcie dwusiecznych kątów)

P = a*b*c / (4*R) - R – promień okręgu opisanego na trójkącie (przecięcie symetralnych boków)

$P = 2 \cdot R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$

$P = 2 \cdot r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$

Obwód trójkąta: **L = a + b + c**

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a, b, c wyraża się wzorem:

r = P / p gdzie **P** – <u>pole trójkąta</u>, p = ½*L = ½ * (a + b + c) – <u>połowa obwodu</u>

r = a*b*c / (4*R*p)

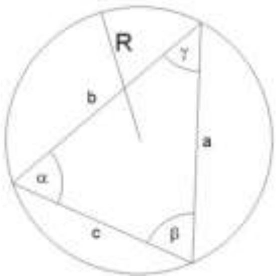
r = √ (p*(p-a)*(p-b)*(p-c) / p)

Promień R okręgu opisanego na trójkącie o bokach a, b, c wyraża się wzorem:

R = **a*b*c / (4*P)** = a*b* c / (4 * r * p) gdzie P – pole trójkąta, p – połowa obwodu

R = a / (2 * sin α) = b / (2 * sin β) = c / (2 * sin γ)

Twierdzenie sinusów – Snelliusa



a: b : c = sin α : sin β : sin γ

a: sin α = b: sin β = c: sin γ = 2*R

Twierdzenie cosinusów – Carnota

Wzory cosinusów:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$

<u>Twierdzenie cosinusów</u> wykorzystujemy *przy rozwiązywaniu trójkątów w przypadkach, gdy*:
- dane są dwa boki i jeden kąt między nimi (**bkb**),
- dane są trzy boki (**bbb**).

Twierdzenie tangensów - Regiomontana

(a + b) / (a – b) = tg [(α + β)/2] : tg [(α - β)/2]

(b + c) / (b – c) = tg [(β +γ)/2] : tg [(β -γ)/2]

(a + c) / (c – c) = tg [(α +γ)/2] : tg [(α -γ)/2]

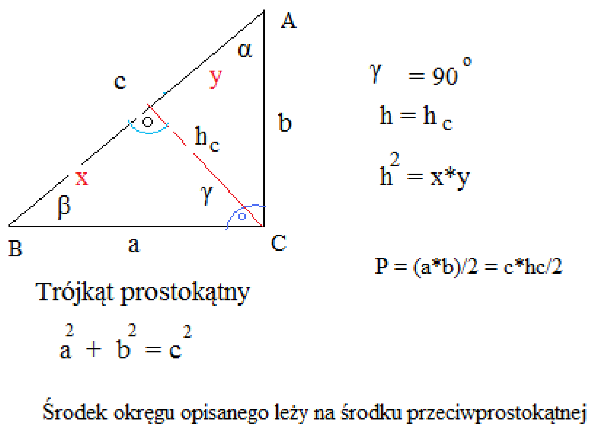
Promień okręgu wpisanego w trójkąt
$r = (p – a) * tg\ \alpha/2 = (p – b) * tg\ \beta /2 = p – c) * tg\ \gamma /2$; gdzie $p = (a + b + c) : 2$

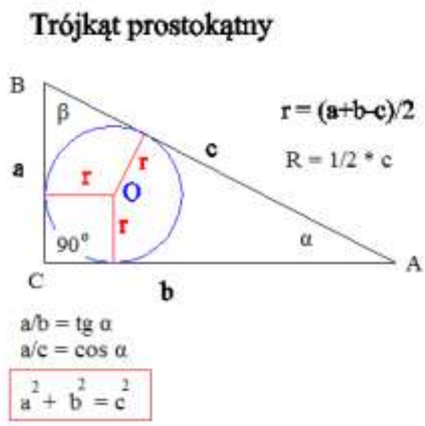
Promień okręgu opisanego na trójkącie
$R = a: (2*\sin \alpha) = b : (2 * \sin \beta) = c : (s * \sin \gamma)$
$P = ½ * a * b * \sin \gamma = a^2 * \sin \beta * \sin \gamma : (2 * \sin \alpha) = 2 * r^2 * \sin \alpha * \sin \beta * \sin \gamma$

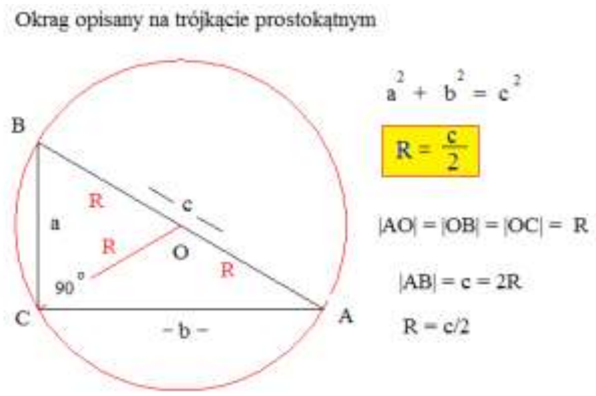
Wzory połówkowe
$\sin \alpha/2 = \sqrt{[(p-b)*(p-c)/(b*c)]}$
$\cos \alpha/2 = \sqrt{[(p-a)*p / (b*c)]}$
$tg\ \alpha/2 = \sqrt{[(p-b)*(p-c) /(p*(p-a)]}$

Trójkąt prostokątny

a, b – długości przyprostokątnych
c – długość przeciwprostokątnej,
x – rzut prostokątny boku a na bok c, y – rzut prostokątny boku b na bok c







$P = ½ * c * hc$ połowa iloczynu przekątnej i wysokości opuszczonej na przekatną
$P = ½ * a * b$ połowa iloczynu przyprostokatnych

$L = a + b + c$

$h^2 = x*y = a_c * b_c$ - **a_c** – rzut boku a na przeciwprostokątną c, **b_c** – rzut boku b na bok c

$r = ½ * (a + b – c)$ promień okręgu wpisanego = połowa różnicy sumy przyprostokątnych i przeciwprostokątnej
$R = ½ * c$ połowa przeciwprostokątnej

Trójkąt równoboczny

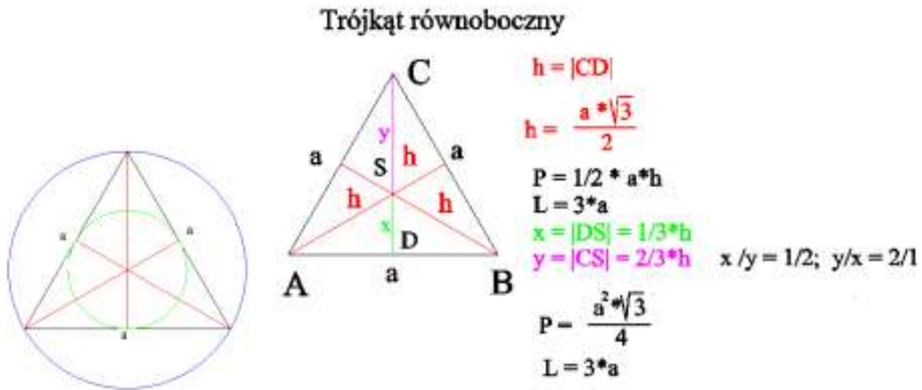
a – długość boku

h – długość wysokości

a = b = c

$\alpha = \beta = \gamma = 60^o$

Ma 3 osie symetrii: środek ciężkości, ortocentrum oraz środki okręgu wpisanego i opisanego pokrywają się



$h = ½ * \sqrt{3} * a = a * \sqrt{3}/2$ - wysokość

$r = 1/3 * h = a*\sqrt{3} / 6$ - promień okręgu wpisanego = 1/3 wysokości

$R = 2/3 * h = 2*r = a*\sqrt{3} / 3$ – promień okręgu opisanego = 2/3 wysokości

Pole P i obwód L trójkąta równobocznego

$P = ½ * a * h$ $h = a*\sqrt{3}/2$

$P = a^2 * \sqrt{3} / 4$ pole

$L = 3*a$ obwód

$|DS| = 1/3 * h = 1/3 * a*\sqrt{3}/2 = a*\sqrt{3} / 6 = r$ - promień okręgu wpisanego

$|CS| = 2/3 * h = 2/3 * a*\sqrt{3}/2 = a*\sqrt{3} / 3 = R$ – promień okręgu opisanego

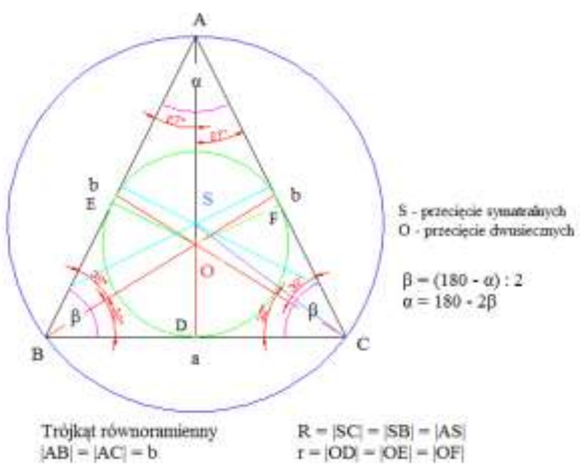
$r = a*\sqrt{3} / 6$ - promień okręgu wpisanego;

$R = a*\sqrt{3} / 3$ – promień okręgu opisanego

Trójkąt równoramienny

Boki: a, b = c, Kąty: α – między ramionami kąta, β = γ

Ma co najmniej jedną oś symetrii (3 osie jeśli jest równoboczny)



$\beta = (180^o – \alpha) / 2$ β - kąty przy podstawie

$\alpha = 180^o – 2\alpha$ α – kąt przy wierzchołku między ramionami

$a = 2b * \sin \alpha/2$

$h = b * \cos \alpha/2$

$P = ½ * a * h = b^2 * \sin \alpha/2 = ½ * b^2 * \sin \alpha$

Prostokąty

Prostokąt to czworokąt, którego wszystkie boki są równe

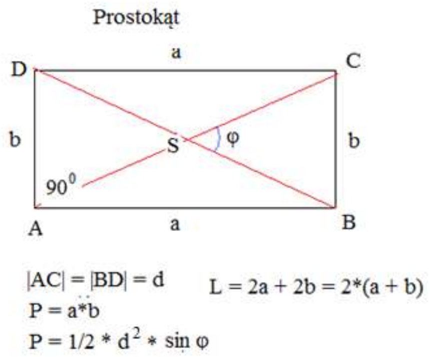
a, b – długości boków prostokąta; ϕ – kąt przecięcia przekątnych; d – długość przekątnej

Pole P i obwód L

$P = a * b$ iloczyn boków

$P = ½ * d^2 * \sin \phi$ połowa iloczynu kwadratu przekątnej i sinusa kąta między przekątnymi

$L = 2a + 2b$ suma boków



Prostokąt jest równoległobokiem.

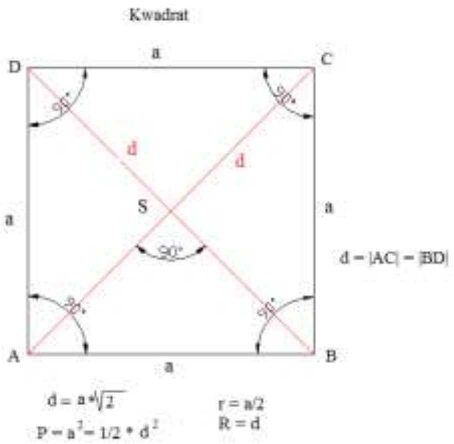
W każdym prostokącie

- przekątne są równe i przecinają się w środku każdej z nich
- punkt przecięcia przekątnych prostokąta jest jego środkiem symetrii

---

Kwadraty

Kwadrat – czworokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe



$P = a^2$ bok do kwadratu

$P = ½ * d^2$ połowa kwadratu przekątnej

$L = 4a$

Równoległoboki

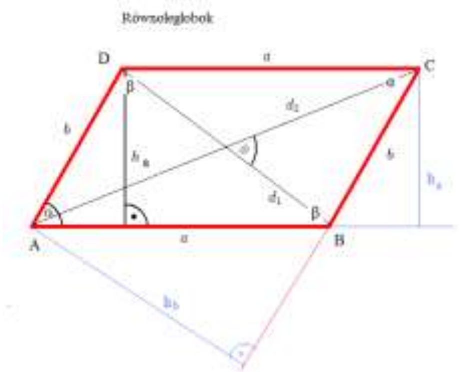
Równoległobok – czworokąt, który ma 2 pary boków równoległych

$\alpha + \beta = 180^o$

$P = a*h_a$ **$P = b*h_b$** podstawa * wysokość

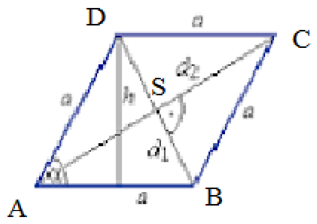
$P = a * b * \sin\alpha = a * b * \sin\beta$ bok * bok * sinus kąta (między tymi bokami)
$P = ½ * d_1 * d_2 * \sin\phi$ ½ * przekątna * przekątna * sinus kąta (między przekornymi)

$L = 2*a + 2*b = 2*(a + b)$



Romby

Romb – czworokąt, którego wszystkie boki są równe



Romb
AC _|_ BD

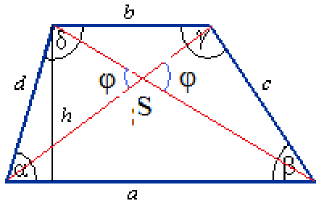
$P = a * h$ podstawa razy wysokość
$P = ½ *d_1 * d_2$ połowa iloczynu przekątnych
$P = a^2 * \sin\alpha$ kwadrat boku razy sinus kąta między bokami

$L = 4*a$

Trapezy

Trapez – czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych

Trapez



a - podstawa dolna trapezu
b - podstawa górna trapezu

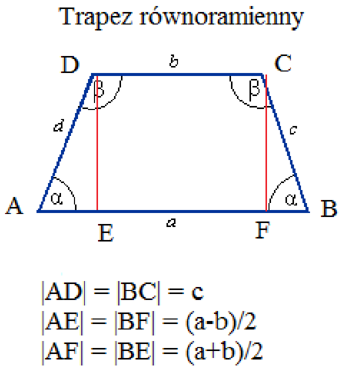
a, b – boki trapezu
c, d – ramiona trapezu
h – wysokość trapezu
α, β, γ, δ – kąty wewnętrzne trapezu
φ – kąt przecięcia się przekątnych trapezu

$\alpha + \delta = 180°$ $\beta + \gamma = 180°$

$P = ½ * (a+b)*h$ połowa iloczynu sumy podstaw i wysokości
$P = ½ * d_1 * d_2 * \sin\varphi$ połowa iloczynu przekątnych i sinusa kąta między przekątnymi

$L = a + b + c + d$

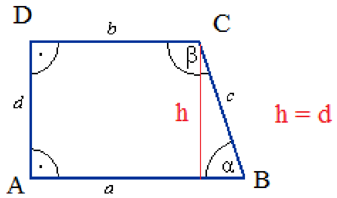
Jeżeli kąty przy tej samej podstawie trapezu są równe, to trapez jest **równoramienny**



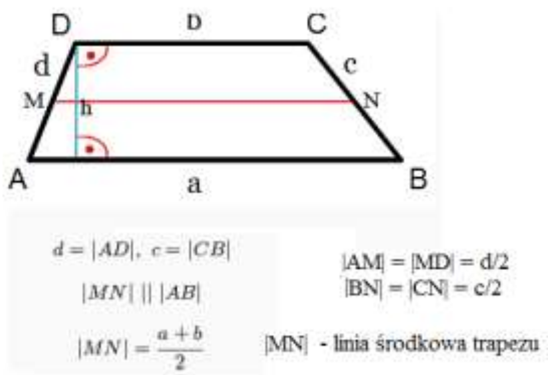
|AD| = |BC| = c |AE| = |BF| = (a - b) / 2 |AF| = |BE| = (a + b) / 2

Trapez prostokątny

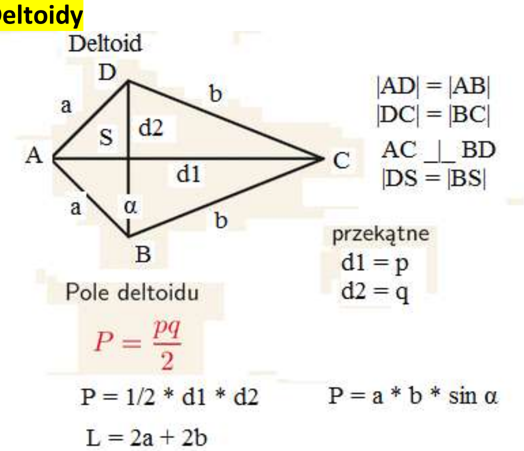
Trapez, którego jedno ramię tworzy kąty proste z podstawami, nazywa się trapezem prostokątnym.
W trapezie prostokątnym ramię prostopadłe jest wysokością trapezu.



Linia środkową trapezu – odcinek łączący środki ramion trapezu
Długość odcinka łączącego środki ramion jest średnią arytmetyczną długości jego podstaw.
|MN = (a + b) /2



Deltoidy

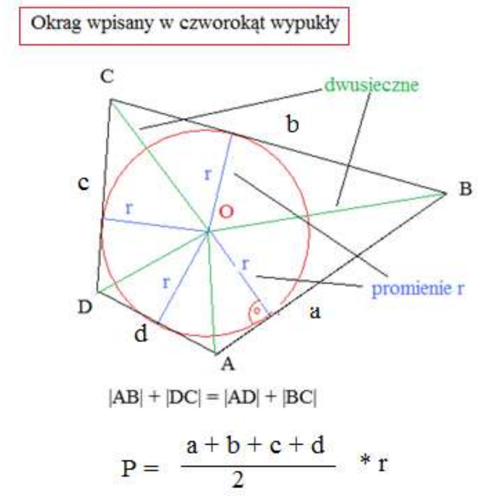


P = ½ * d1 * d2   **P = a * b * sin α**   **L = 2*a + 2*b**

Okrąg wpisany w czworokąt

Środek okręgu wpisanego w czworokąt jest jednakowi odległy od jego boków
i jest punktem przecięcia się dwusiecznych wszystkich jego kątów wewnętrznych.

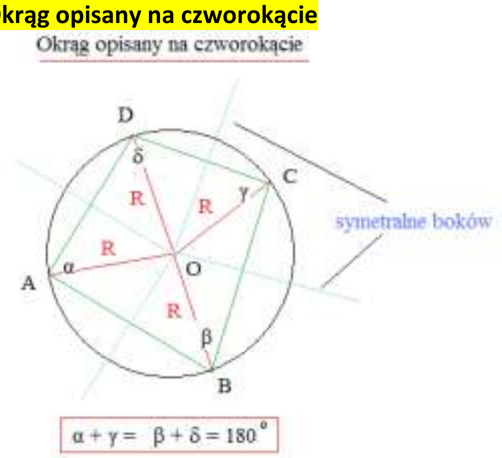
Jeżeli okrąg jest wpisany w czworokąt wypukły, to **sumy długości przeciwległych jego boków są równe.**



Pole czworokąta wypukłego o bokach długości **a, b, c, d**, opisanego na okręgu o promieniu **r** określone jest wzorem:

P = (a + b + c + d) *r /2 = ½ *r* (a + b + c + d)

Okrąg opisany na czworokącie



Środek okręgu opisanego na czworokącie jest punktem jednakowo odległym od wierzchołków tego wielokąta i jest punktem przecięcia się symetralnych wszystkich jego boków.

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma jego przeciwległych kątów wewnętrznych jest równa 180^o

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0$ - warunek by opisać okrąg na czworokącie

$\alpha + \delta = \mathbf{180^0}$ $\beta + \gamma = \mathbf{180^0}$ - warunki na kąty w trapezie

Na każdym trapezie równoramiennym, w którym kąty przy każdej podstawie mają równe miary, można opisać okrąg.

Na każdym prostokącie i kwadracie można opisać okrąg.

Promień okręgu opisanego na prostokącie i kwadracie określa wzór:
R = ½ * d , gdzie d – długość przekątnej

W prostokąt, który nie jest kwadratem nie można wpisać okręgu

Aby można było w **trapez** wpisać **okrąg** musi być spełniony warunek:
Sumy długości boków przeciwległych muszą być równe, czyli
a + b = c + d