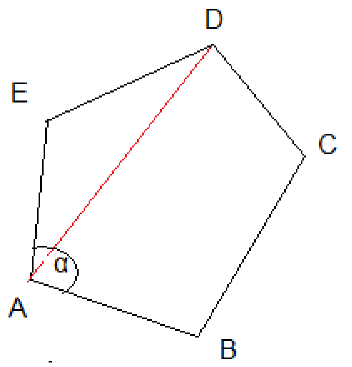
Wielokąty na płaszczyźnie – obliczenia z zastosowaniem trygonometrii

Obliczenia geometryczne z zastosowaniem własności funkcji trygonometrycznych w wielokątach wypukłych

Wielokąt - figura płaską będąca sumą łamanej zwyczajnej zamkniętej
i obszaru ograniczonego wyciętego z płaszczyzny przez tę łamaną.
Wielokąt o n bokach nazywamy również **n-kątem**.
Najczęściej spotykanymi wielokątami są trójkąty i czworokąty.

Odcinki, tworzące wielokąt, nazywamy jego bokami, a punkty ich przecięcia wierzchołkami wielokąta.
Sumę wszystkich boków nazywamy obwodem wielokąta.
Linię łamaną ograniczającą wielokąt nazywamy brzegiem wielokąta.
Brzeg wielokąta dzieli płaszczyznę na dwa obszary, z których jeden jest *ograniczony*, nazywamy go obszarem wewnętrznym, drugi jest *nieograniczony* i nazywamy go obszarem zewnętrznym.



Wielokąt ABCDE

Wierzchołki: A, B, C, D, E

Boki: |AB|, |BC|, |CD|, |DE|, |EA|
|AD| - jedna z przekątnych

α - kąt wewnętrzny

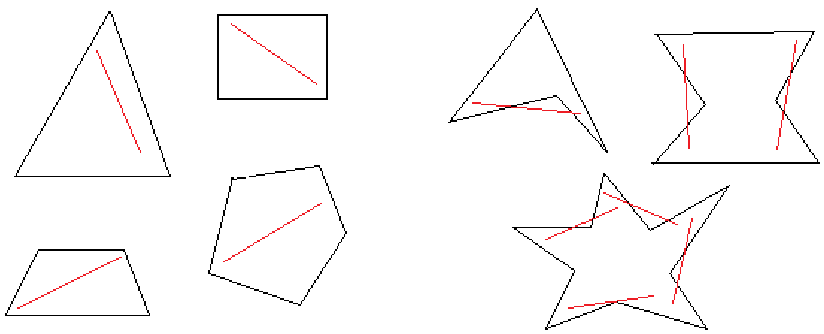
Przekątną wielokąta nazywamy odcinek, który łaczy dwa niekolejne wierzchołki wielokąta.

Liczba przekątnych n-kąta jest równa n*(n−3)/2

Wielokąt wypukły – miara każdego kąt wewnętrznego jest mniejsza od 180^{o}.

Przykłady wielokątów wypukłych i niewypukłych (wklęsłych)

WIELOKĄTY WYPUKŁE | WIELOKĄTY WKLĘSŁE



Wielokąt wypukły - każdy kąt wewnętrzny jest mniejszy od 180 stopni.

Każdy odcinek o końcach w wielokącie zawiera się w wielokącie

Wielokąt nazywa się wklęsłym jeśli choć jeden kąt jest kątem większym od kąta półpełnego (kątem wklęsłym)

Istnieje choć jeden odcinek o końcach w wielokącie, że część tego odcinka jest poza wielokątem

Suma kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego o **n** wierzchołkach **= (n-2)*180°.**

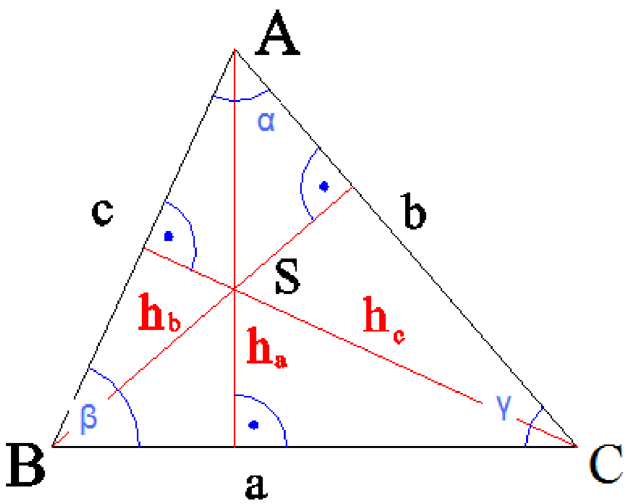
Wielokąty foremne: trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny, sześciokąt foremny …

Uwagi:
Odcinki lub ich długości oznaczamy najczęściej małymi literami alfabetu łacińskiego: **a, b, c, d**, …
Kąty lub ich miary najczęściej oznaczamy małymi literami alfabetu greckiego:
α, β, γ, δ, ε, ζ, θ, κ, λ, μ, ν, ξ, ρ, σ, τ, φ, ψ, ω …
(*alfa, beta, gamma, delta, epsilon, dzeta, teta, kappa, lambda, mi, ni, ksi, ro, sigma, tau, fi, psi, omega* …)

Trójkąty

Każdy trójkąt jest wielokątem wypukłym.
W technice trójkąt nazywany jest figurą sztywną – jego kształt zmienia się tylko wtedy,
gdy zmieni się długość przynajmniej jednego z boków.
Model trójkąta i własność sztywności wykorzystuje się w technice m.in. do wzmacniania konstrukcji, np. mostów, belek stropowych, słupów wysokiego napięcia.

Trójkąt dowolny



Trójkąt dowolny
a, b, c - długości boków trójkąta
ha, hb, hc - długości wysokości trójkąta, poprowadzonych odpowiednio na boki a, b, c

Pole P:
P = 1/2 * a * ha
P = 1/2 * b * hb
P = 1/2 * c * hc

P = 1/2 * b*c * sin α
P = 1/2 * a*c * sin β
P = 1/2 * a*b * sin γ

Obwód L = a + b + c

Pole trójkąta ze współrzędnych
P = ½ * [xB – xA) * (yC – yA) – (xC – xA) * (yB – yA)]

P = ½ * (x1*y2+x2*y3+x3*y1-x3*y2-x1*y3-x2*y1)

Suma kątów wewnętrznych trójkąta: **α+β+γ = 180^0 = 200^g = 2π [rad]**

Pole trójkąta:

Dane: bok jako podstawa i wysokość opuszczona na tę podstawę

P = ½ * bok * wysokość (opuszczona na bok)

P = ½ * a * h_a = ½ * b * h_b = ½ * c * h_c

Dane 2 boki i kąt między nimi

Pole trójkąta = ½ * bok_1 * bok_2 * sin kąta (między tymi bokami)

P = ½ * b * c * sin α = ½ * a * c * sin β = ½ * a * b * sin γ

Pole trójkąta ze współrzędnych jego wierzchołków

1) Na podstawie przyrostów współrzędnych

Oznaczenia: Δx(PK), Δy(PK) – różnice współrzędnych – przyrosty od punktu P do K – współrzędne wektora PK

P = ½ * | Δx(AB) Δy(AB) | = ½ * | (xB – xA) (yB – yA) |
| Δx(AC) Δy(AC) | | (xC – xA) (yC – yA) |

P = ½ * [xB – xA) * (yC – yA) – (xC – xA) * (yB – yA)]

2) Bezpośrednio ze współrzędnych

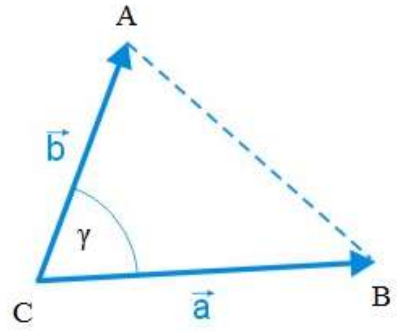
2P = | x1 y1 1 |
| x2 y2 1 |

| x3 y3 1 |

Stąd: 2P = x1*y2+x2*y3+x3*y1-x3*y2-x1*y3-x2*y1

P = ½ * (x1*y2+x2*y3+x3*y1-x3*y2-x1*y3-x2*y1)

Pole trójkąta wyznaczonego przez 2 wektory



P = ½ * |ax ay|

|bx by|

P = ½ * |(a_x*b_y – a_y*b_x)|

Pole trójkąta wyznaczonego przez 2 niezerowe wektory, zaczepione we wspólnym początku jest równe połowie modułu wyznacznika tych wektorów.

Obliczenie pola trójkąta, gdy dane 3 boki

Wzór Herona

P = √(p*(p-a)*(p-b)*(p-c)) ; gdzie p = ½ * (a + b + c) – połowa obwodu trójkąta

Pola z wykorzystaniem promieni r i R

P = r*p - r – promień okręgu wpisanego (przecięcie dwusiecznych kątów)

P = a*b*c / (4*R) - R – promień okręgu opisanego na trójkącie (przecięcie symetralnych boków)

P = 2*R^2 * sin α * sin β * sin γ

P = 2 * r^2 * sin α * sin β * sin γ

Obwód trójkąta: **L = a + b + c**

Promienie okręgów: r – wpisanego w trójkąt, R – opisanego na trójkącie:

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a, b, c wyraża się wzorem:

r = P / p gdzie **P** – pole trójkąta, p = ½*L = ½ * (a + b + c) – połowa obwodu

r = a*b*c / (4*R*p)

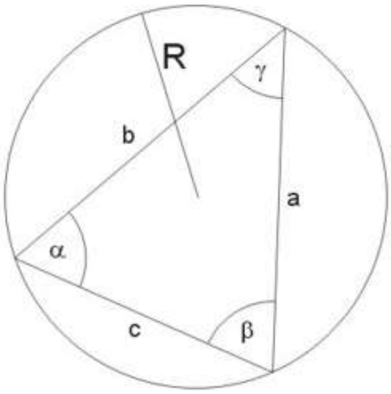
r = √ (p*(p-a)*(p-b)*(p-c) / p)

Promień R okręgu opisanego na trójkącie o bokach a, b, c wyraża się wzorem:
R = a*b*c / (4*P) = a*b* c / (4 * r * p) gdzie P – pole trójkąta, p – połowa obwodu

R = a / (2 * sin α) = b / (2 * sin β) = c / (2 * sin γ)

Twierdzenia związane z funkcjami trygonometrycznymi dotyczące trójkątów

Twierdzenie sinusów – Snelliusa



a: b : c = sin α : sin β : sin γ
a: sin α = b: sin β = c: sin γ = 2*R

Stosunek długości dowolnego boku trójkąta do sinusa przeciwległego kąta jest stały i równy podwojonej długości promienia *R* okręgu opisanego na tym trójkącie.
Twierdzenie sinusów *wykorzystujemy przy rozwiązywaniu trójkątów w przypadkach, gdy*:
- dane są dwa kąty i jeden bok trójkąta (**kbk**),
- dane są dwa boki i kąt leżący naprzeciw jednego z nich.

Twierdzenie cosinusów – Carnota

W dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych dwóch boków,
pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

Wzory cosinusów:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos\gamma$$

Twierdzenie cosinusów wykorzystujemy *przy rozwiązywaniu trójkątów w przypadkach, gdy*:
- dane są dwa boki i jeden kąt między nimi (**bkb**),
- dane są trzy boki (**bbb**).

Twierdzenie tangensów - Regiomontana

(a + b) / (a – b) = tg [(α + β)/2] : tg [(α - β)/2]
(b + c) / (b – c) = tg [(β +γ)/2] : tg [(β -γ)/2]

$(a + c) / (c – c) = tg [(\alpha + \gamma)/2] : tg [(\alpha - \gamma)/2]$

W dowolnym trójkącie stosunek sumy do różnicy długości dwóch boków jest taki sam, jak stosunek tangensów połowy sumy i połowy różnicy przeciwległych kątów.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt

$r = (p – a) * tg\ \alpha/2 = (p – b) * tg\ \beta /2 = p – c) * tg\ \gamma /2$

gdzie $p = (a + b + c) : 2$

Promień okręgu opisanego na trójkącie

$R = a: (2*\sin \alpha) = b : (2 * \sin \beta) = c : (s * \sin \gamma)$

$P = ½ * a * b * \sin \gamma = a^2 * \sin \beta * \sin \gamma : (2 * \sin \alpha) = 2 * r^2 * \sin \alpha * \sin \beta * \sin \gamma$

Wzory połówkowe

$\sin \alpha/2 = \sqrt{} [(p-b)*(p-c)/(b*c)]$

$\cos \alpha/2 = \sqrt{} [(p-a)*p / (b*c)]$

$tg\ \alpha/2 = \sqrt{} [(p-b)*(p-c) /(p*(p-a)]$

<u>Rozwiązywanie trójkąta</u>

I Dane 3 boki: a, b, c:

Kąty α, β, γ ze wzoru cosinusów

Np.

$a^2 = b^2 + c^2 – 2 * b * c * \cos \alpha$

$\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / (2*b*c)$

II Dane 2 boki (np. a i b) i kąt zawarty między nimi (γ)

1) c ze wzoru cosinusów: **$c^2 = a^2 + b^2 – 2 * a * b * \cos \gamma$**
2) następne kąty ze wzoru sinusów lub cosinusów

III Bok a i 2 leżące przy nim kąty (β i γ)

1) brakujące boki ze wzoru sinusów
2) trzeci kąt – z sumy kątów trójkąta (180^o)

IV Dane 2 boki (b i c) i kąt leżący naprzeciw jednego z nich (β)

1) kąt γ ze wzoru sinusów
2) kąt α z sumy kątów trójkąta
3) trzeci bok (a) ze wzoru sinusów

<u>Szczególne odcinki i proste w trójkącie</u>

Wysokość trójkąta – odcinek łączący wierzchołek trójkąta i rzut prostokątny tego wierzchołka na przeciwległy bok lub prostą zawierającą przeciwległy bok.

$h_a = b*c : (2*R) = b * \sin \gamma = c * \sin \beta$

Przecięcie wysokości to **ortocentrum**

Symetralna boku – prosta prostopadła do boku i przechodząca przez jego środek

Przecięcie symetralnych – **środek okręgu opisanego**

Środkowa boku trójkąta – odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku

$m_a = ½ * \sqrt{}[2*(b^2 + c^2 – a^2)$

Przecięcie środkowych – środek ciężkości trójkąta

Odcinek dwusiecznej kąta – odcinek prostej dzielącej kąt przy wierzchołku na połowy, liczony od wierzchołka do przecięcia z przeciwległym bokiem
$l_a = \sqrt{\{b*c*[(b+c)^2 - a^2]/(b+c)\}}$
Przecięcie dwusiecznych – **środek okręgu wpisanego**

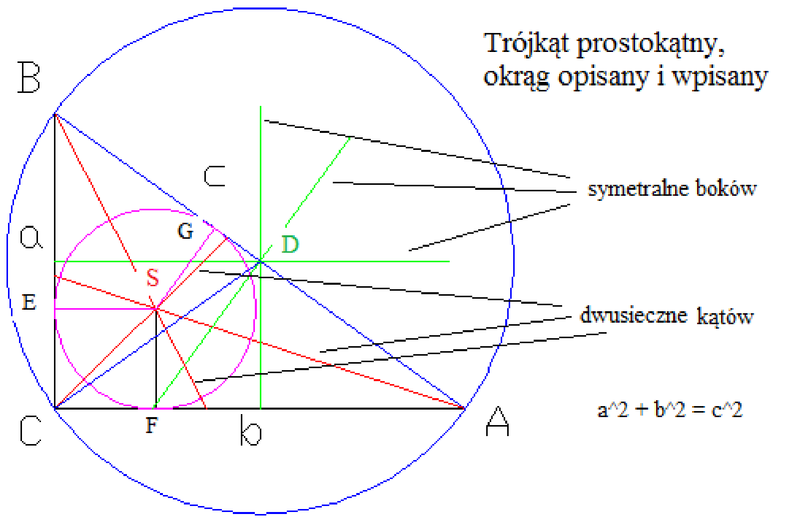
Linia środkowa – odcinek łączący środki 2 boków – jest równoległy do trzeciego boku.
Połowa długości boku, do którego linia środkowa jest równoległa.

Szczególne rodzaje trójkątów

Trójkąt ostrokątny

$\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ środek okręgu opisanego leży wewnątrz trójkąta

Trójkąt prostokątny



|AD| = |BC| = |CD| = R - promień okręgu opisanego
D - śreodek odcinka |AB| - środek przeciwprostokątnej
- przecięcie symetralnych boków a, b, c

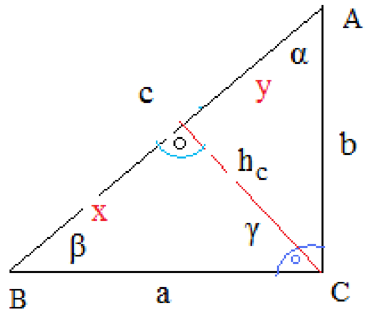
AS, BS, CS - dwusieczne kątów trójkąta
S - przecięcie dwusiecznych kątów - środek okręgu wpisanego o promieniu r
r = |ES| = |FS| = |GS| - promienie prostopadłe do boków trójkąta

a, b – długości przyprostokątnych
c – długość przeciwprostokątnej,
x – rzut prostokątny boku a na bok c, y – rzut prostokątny boku b na bok c
- odcinki, na które wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną.

Zależności w trójkącie prostokątnym

$a^2 + b^2 = c^2$
$h^2 = x*y$

$a^2 = x*c$
$b^2 = y*c$
$c*h = a*b = 2P$



$\gamma = 90^\circ$

$h = h_c$

$h^2 = x*y$

$P = (a*b)/2 = c*hc/2$

Trójkąt prostokątny

$a^2 + b^2 = c^2$

Środek okręgu opisanego leży na środku przeciwprostokątnej

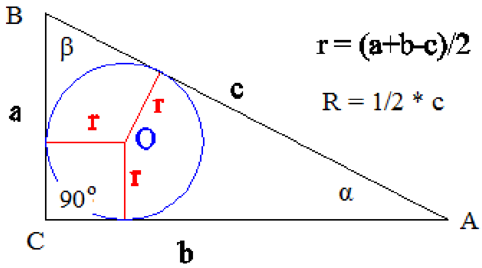
Pole **P** i obwód **L** trójkąta prostokątnego

$P = ½ * c * hc$
$P = ½ * a * b$
$L = a + b + c$

W trójkącie prostokątnym kwadrat długości wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które dzieli ona przeciwprostokątną.

$h^2 = x*y = a_c * b_c$ - a_c – rzut boku a na przeciwprostokątną c, b_c – rzut boku b na bok c

Okrag wpisany w trójkąt prostokątny



$r = (a+b-c)/2$ promień okręgu wpisanego

$R = 1/2 * c$ promien okręgu opisanego

$a/b = \mathrm{tg}\,\alpha$

$a/c = \cos\alpha$

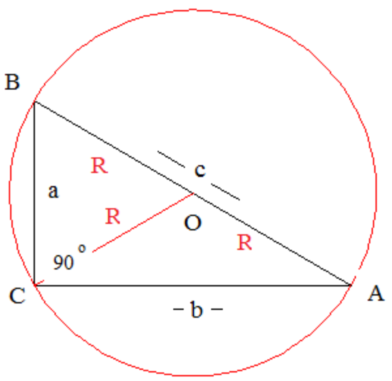
$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

$r = P / p = 1/2 * (a + b - c)$

$R = a*b*c / (4*P) = c/2$

$P = a*b/2$ - pole trójkąta prostokątnego

Okrag opisany na trójkącie prostokątnym



$a^2 + b^2 = c^2$

$\boxed{R = \frac{c}{2}}$

$|AO| = |OB| = |OC| = R$

$|AB| = c = 2R$

$R = c/2$

<u>Promień **r** okręgu wpisanego</u>: **r = ½ * (a + b –c)**

<u>Promień **R** okręgu opisanego</u>: **R = ½ * c**

<u>Rozwiązywanie trójkąta prostokątnego</u>

Dane: bok i kąt ostry α

1) drugi kąt ostry ze wzoru: **$\beta = 90^\circ - \alpha$**
2) pozostałe boki ze wzoru sinusów albo definicji funkcji sin, cos, tg

Dane 2 boki:

1) Trzeci bok z twierdzenia Pitagorasa
2) Kąty – ze wzorów definiujących funkcje sin, cos, tg

Trójkąt równoboczny

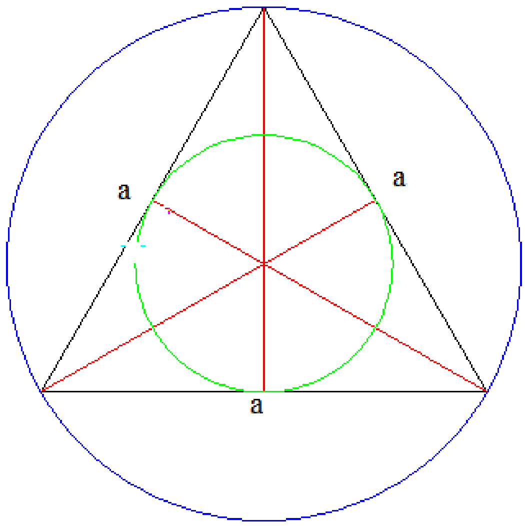
a – długość boku

h – długość wysokości

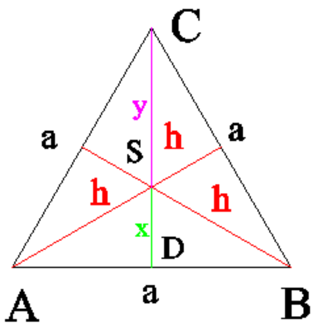
a = b = c

$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

Ma 3 osie symetrii: środek ciężkości, ortocentrum oraz środki okręgu wpisanego i opisanego pokrywają się



Trójkąt równoboczny



$h = |CD|$

$$h = \frac{a * \sqrt{3}}{2}$$

$P = 1/2 * a*h$
$L = 3*a$
$x = |DS| = 1/3*h$
$y = |CS| = 2/3*h$ $\quad x/y = 1/2; \; y/x = 2/1$

$$P = \frac{a^2 * \sqrt{3}}{4}$$

$L = 3*a$

h = ½ * √3 * a = a * √3/2 - wysokość

r = 1/3 * h = a*√3 / 6 - promień okręgu wpisanego

R = 2/3 * h = 2*r = a*√3 / 3 – promień okręgu opisanego

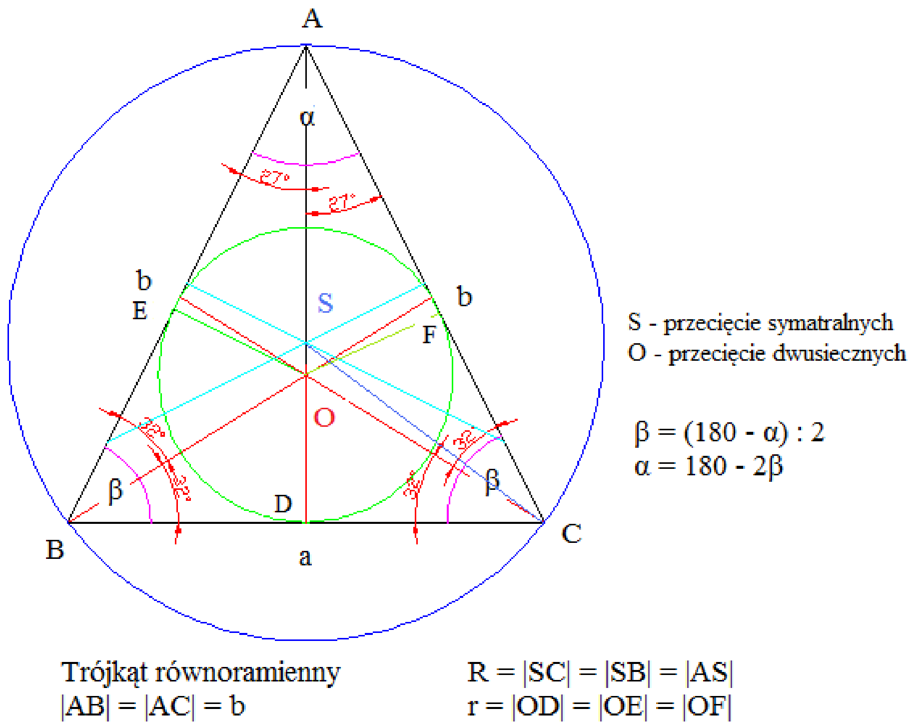
Pole P i obwód L trójkąta równobocznego
P = ½ * a * h
h = a*√3/2
P = a^2 * √3 / 4
L = 3*a
|DS| = 1/3 * h = 1/3 * a*√3/2 = **a*√3 / 6 = r** - promień okręgu wpisanego
|CS| = 2/3 * h =2/3 * a*√3/2 = **a*√3 / 3 = R** – promień okręgu opisanego

r = a*√3 / 6 - promień okręgu wpisanego

R = a*√3 / 3 – promień okręgu opisanego

Trójkąt równoramienny

Boki: a, b = c,
Kąty: α – między ramionami kąta, β = γ
Ma co najmniej jedną oś symetrii (3 osie jeśli jest równoboczny)



$\beta = (180^\circ - \alpha) / 2$
$\alpha = 180^\circ - 2\alpha$
$a = 2 * b * \sin \alpha/2$
$h = b * \cos \alpha/2$
$P = ½ * a * h = b^2 * \sin \alpha/2 = ½ * b^2 * \sin \alpha$

Prostokąty

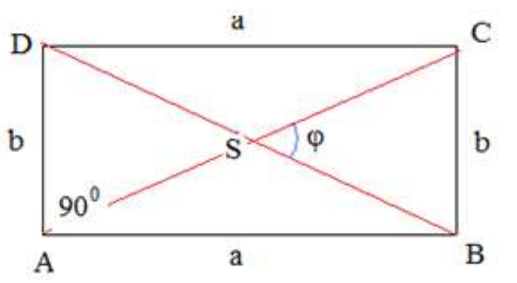
Prostokąt to <u>czworokąt, którego wszystkie boki są równe</u>
a, b – długości boków prostokąta
ϕ – kąt przecięcia przekątnych
d – długość przekątnej
$d^2 = a^2 + b^2$

Pole P i obwód L
P = a * b

$P = ½ * d^2 * \sin \phi$

$L = 2a + 2b$

Prostokąt



$|AC| = |BD| = d$ $L = 2a + 2b = 2*(a + b)$

$P = a*b$

$P = 1/2 * d^2 * \sin \varphi$

Prostokąt jest równoległobokiem.

<u>W każdym prostokącie</u>

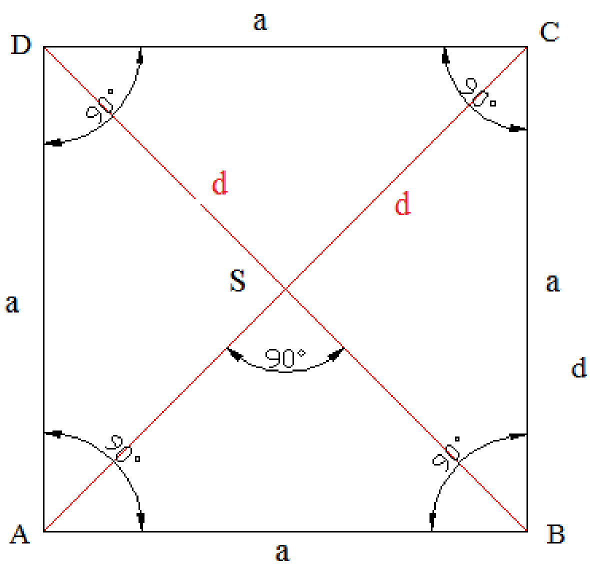
- przekątne są równe i przecinają się w środku każdej z nich
- punkt przecięcia przekątnych prostokąta jest jego środkiem symetrii

---

Kwadraty

Kwadrat – <u>czworokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe</u>

Kwadrat



$d = |AC| = |BD|$

$d = a * \sqrt{2}$ $r = a/2$

$P = a^2 = 1/2 * d^2$ $R = d$

$P = a^2$
$P = ½ * d^2$
$L = 4a$

Równoległoboki

Równoległobok – czworokąt, który ma 2 pary boków równoległych

$\alpha + \beta = 180^o$
$h_a = a * \sin \boldsymbol{\alpha}$

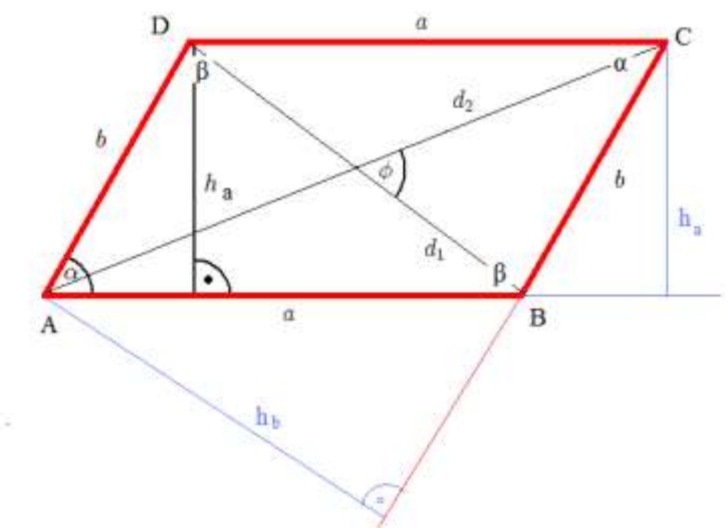
$P = a*h_a$
$P = b*h_b$

$P = a*b * \sin \alpha = a*b*\sin \beta$

$P = ½ * d_1 * d_2 * \sin \phi$

$L = 2*a + 2*b = 2*(a + b)$

Równoległobok

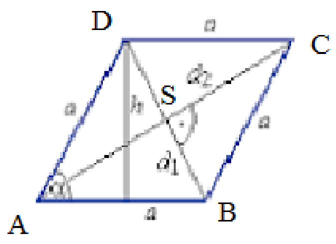


W każdym równoległoboku:
- pary boków równoległych mają tę samą długość
- punkt przecięcia się przekątnych dzieli każdą z nich na połowy
- przeciwległe kąty wewnętrzne się przystające – mają równe miary
- suma miar 2 kolejnych kątów wewnętrznych = 180^0
- punkt przecięcia się przekątnych jest środkiem symetrii równoległoboku

---

Romby

Romb – czworokąt, którego wszystkie boki są równe



Romb
AC _|_ BD

$P = a * h$

$P = \frac{1}{2} * d_1 * d_2$

$P = a^2 * \sin \alpha$

$L = 4*a$

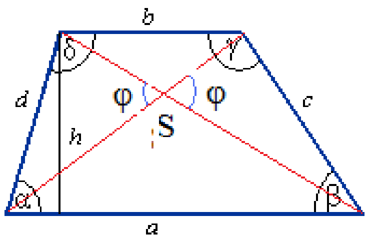
Każdy romb jest równoległobokiem
W każdym rombie:
- wszystkie boki są równe,
- przeciwległe boki są równoległe,
- suma miar dwóch kątów sąsiednich wynosi 180°,
- przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy
- przekątne dzielą romb na 4 przystające trójkąty prostokątne
- przekątne dzielą się na połowy
- sinusy wszystkich kątów są równe: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- przekątne zawierają się w dwusiecznych kątów,
- punkt przecięcia przekątnych rombu wyznacza środek okręgu wpisanego w romb,
- przekątne rombu dzielą go na cztery przystające trójkąty prostokątne,
- punkt przecięcia przekątnych jest środkiem symetrii rombu.

Trapezy

Trapez – czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych

a, b – boki trapezu
c, d – ramiona trapezu
h – wysokość trapezu
α, β, γ, δ – kąty wewnętrzne trapezu
ϕ – kąt przecięcia się przekątnych trapezu

Trapez



a - podstawa dolna trapezu
b - podstawa górna trapezu

a, b – boki trapezu
c, d – ramiona trapezu
h – wysokość trapezu
α, β, γ, δ – kąty wewnętrzne trapezu
φ – kąt przecięcia się przekątnych trapezu

Suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu jest równa 180°.

$\alpha + \delta = 180°$
$\beta + \gamma = 180°$

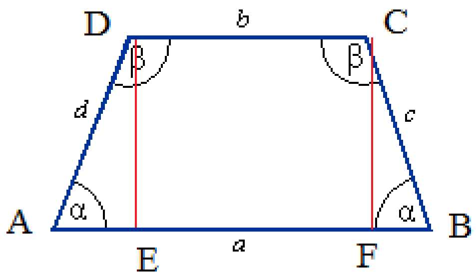
$P = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h$
$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$

$L = a + b + c + d$

Trapez równoramienny

Jeżeli kąty przy tej samej podstawie trapezu są równe, to trapez jest **równoramienny**

Trapez równoramienny



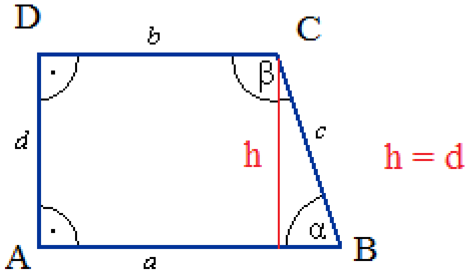
|AD| = |BC| = c
|AE| = |BF| = (a-b)/2
|AF| = |BE| = (a+b)/2

|AD| = |BC| = c
|AE| = |BF| = (a - b) / 2
|AF| = |BE| = (a + b) / 2

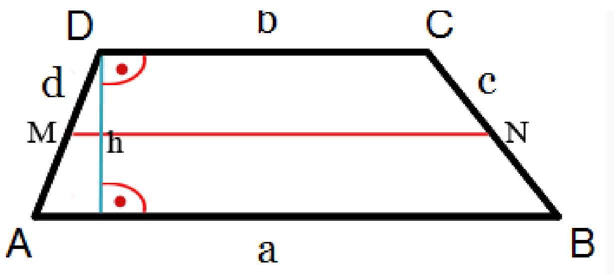
Kąty przy tej samej podstawie trapezu równoramiennego mają równe miary.
Przekątne w trapezie równoramiennym mają równe długości.
Trapez równoramienny posiada oś symetrii będącą symetralną jednej z podstaw.

Trapez prostokątny

Trapez, którego jedno ramię tworzy kąty proste z podstawami, nazywa się trapezem prostokątnym.
W trapezie prostokątnym ramię prostopadłe jest wysokością trapezu.



Linia środkową trapezu – odcinek łączący środki ramion trapezu
Długość odcinka łączącego środki ramion jest średnią arytmetyczną długości jego podstaw.
|MN = (a + b) /2



$$d = |AD|, \ c = |CB|$$

$$|MN| \ || \ |AB|$$

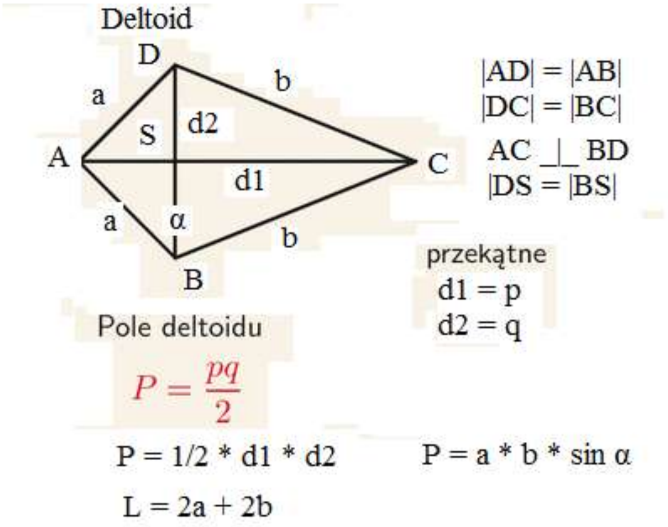
$$|MN| = \frac{a+b}{2}$$

|AM| = |MD| = d/2
|BN| = |CN| = c/2

|MN| - linia środkowa trapezu

Deltoidy

Deltoid – czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z jego przekątnych
Deltoidem nazywamy czworokąt posiadający dwie pary boków sąsiednich równych,
w którym żadne dwa boki nie są wzajemnie równoległe.



Własności deltoidu

- kolejne boki są równe: |AB| = |AD|, |DC| =|CB|
- kąty między różnymi bokami są równe,
- przekątne są prostopadłe: d1 _|_ d2
- przekątna d2 = |BD| dzieli deltoid na dwa trójkąty równoramienne.

P = ½ * d1 * d2 **P = a * b * sin α**

L = 2*a + 2*b

W każdym deltoidzie przekątne są prostopadłe
Przekątna AC dzieląca deltoid na 2 trójkąty przystające dzieli drugą przekątną BD na połowy
Każdy kwadrat i romb jest deltoidem

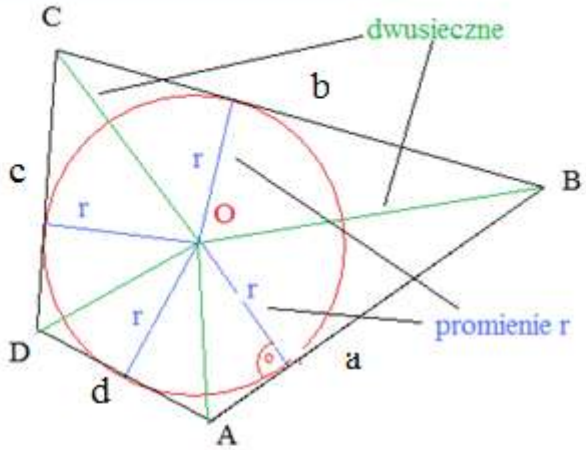
Okrąg wpisany i opisany na czworokącie

Okrąg wpisany w czworokąt

Okrąg wpisany w czworokąt oznacza to samo co czworokąt opisany na okręgu.
Środek okręgu wpisanego w czworokąt jest jednakowi odległy od jego boków
i jest punktem przecięcia się dwusiecznych wszystkich jego kątów wewnętrznych.

Jeżeli okrąg jest wpisany w czworokąt wypukły, to **sumy długości przeciwległych jego boków są równe.**

Okrąg wpisany w czworokąt wypukły



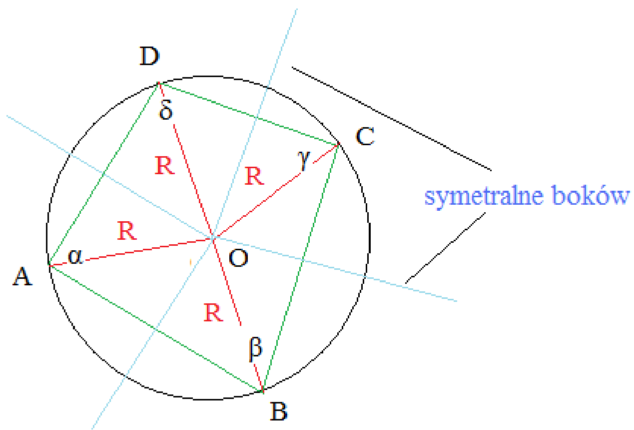
$$|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$$

$$P = \frac{a+b+c+d}{2} * r$$

<u>Pole czworokąta wypukłego</u> o bokach długości **a, b, c, d**, opisanego na okręgu o promieniu **r** określone jest wzorem:
P = (a + b + c + d) *r /2 = **½ *r* (a + b + c + d)**

Okrąg opisany na czworokącie

Okrąg opisany na czworokącie



$$\boxed{\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^{o}}$$

Środek okręgu opisanego na czworokącie jest punktem jednakowo odległym od wierzchołków tego wielokąta
i jest punktem przecięcia się symetralnych wszystkich jego boków.

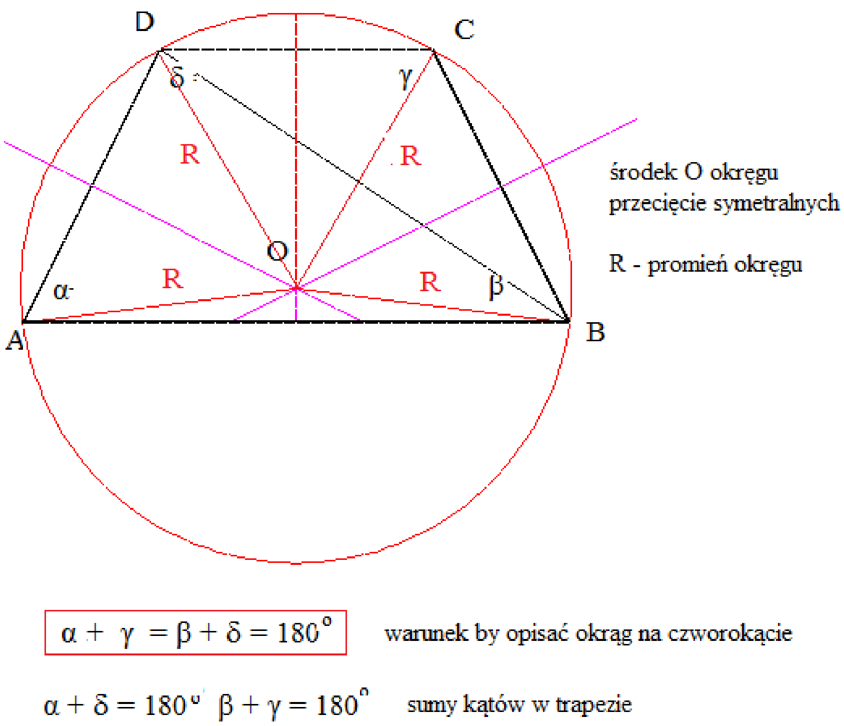
<u>Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy,</u>
<u>gdy suma jego przeciwległych kątów wewnętrznych jest równa 180^{o}</u>

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0$ - warunek by opisać okrąg na czworokącie

$\alpha + \delta = 180^0$ $\beta + \gamma = 180^0$ - warunki na kąty w trapezie

Na każdym trapezie równoramiennym, w którym kąty przy każdej podstawie mają równe miary, można opisać okrąg.

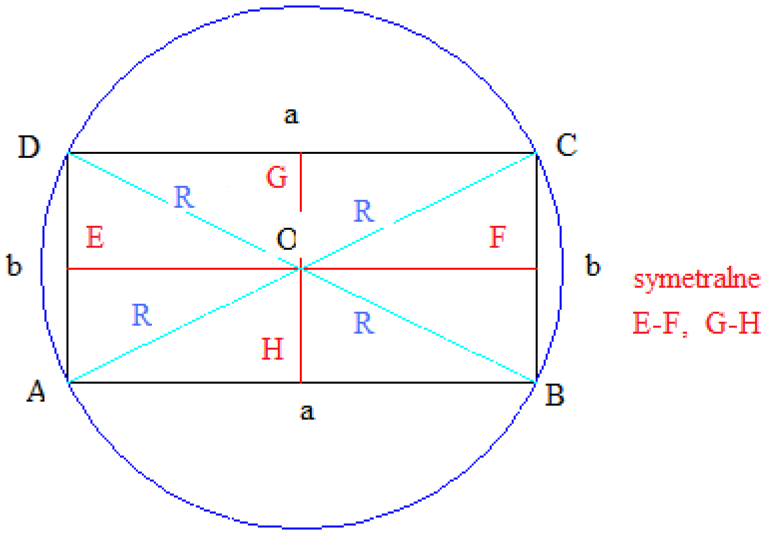
Okrag opisany na trapezie równoramiennym



<u>Na każdym prostokącie i kwadracie można opisać okrąg.</u>

Promień okręgu opisanego na prostokącie i kwadracie określa wzór:
$R = \frac{1}{2} * d$, gdzie d – długość przekątnej

Okrag opisany na prostokącie

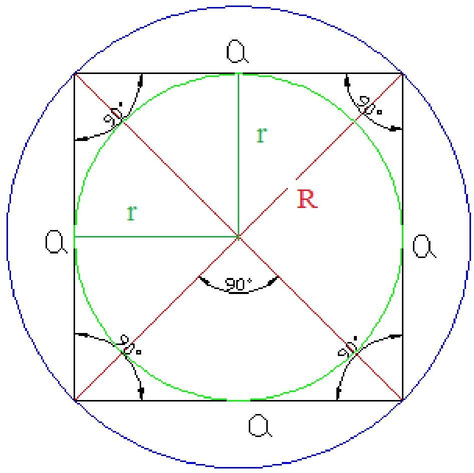


Środek O okręgu - przecięcie symetralnych

$R = 1/2 * d$

$d = |AC| = |BD|$

Okrag wpisany i okrąg opisany na kwadracie



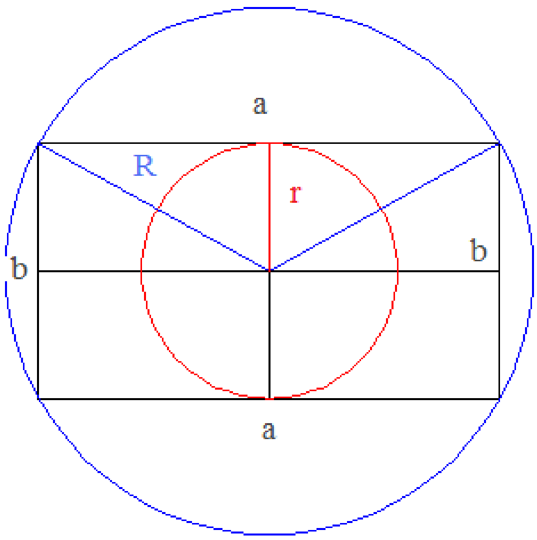
$R = d/2$ - połowa przekątnej

$r = a/2$ - połowa boku kwadratu

$d = a * \sqrt{2}$

W prostokąt, który nie jest kwadratem nie można wpisać okręgu

Prostokąt i okrąg

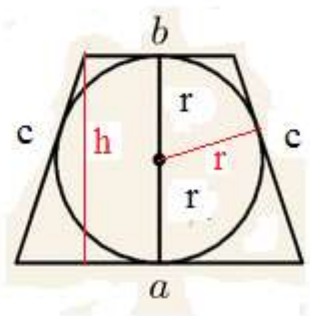


a <> b

<u>Aby można było w **trapez** wpisać **okrąg** musi być spełniony warunek:</u>
Sumy długości boków przeciwległych muszą być równe, czyli
$a + b = c + d$

W trapezie <u>równoramiennym</u>: $a + b = 2*c$

Okrąg wpisany w trapez równoramiennny



$h = 2r$
$a + b = 2c$