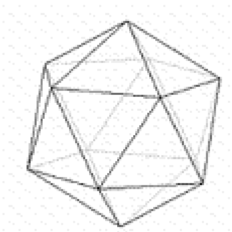
Stereometria – bryły

Stereometria - geometria przestrzeni trójwymiarowej.
Przedmiotem jej badań są własności brył oraz przekształcenia izometryczne i afiniczne przestrzeni.

Przyjęte oznaczenia:

P_b- Pole powierzchni bocznej
P_P- Pole podstawy
P_c- Pole całkowite
V- objętość
h lub H- wysokość
$2p$- długość obwodu podstawy graniastosłupa (inaczej L)
l- długość tworzącej stożka

Wielościany



Wielościanem wypukłym nazywamy każdą bryłę wypukłą, której brzeg jest sumą mnogościową skończonej liczby wielokątów.
Ścianą wielościanu wypukłego nazywamy taki wielokąt, który jest częścią wspólną płaszczyzny i brzegu wielościanu.
Krawędzią wielościanu nazywamy bok jego ściany.
Wierzchołkiem wielościanu nazywamy wierzchołek jego ściany.
Twierdzenie Eulera
Jeżeli wielościan wypukły ma *w* wierzchołków, *k* krawędzi i *s* ścian, to
$w - k + s = 2$
Pole powierzchni wielościanu równe jest sumie pól wszystkich jego ścian.

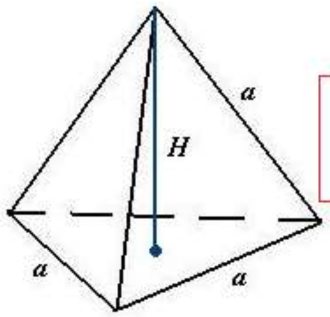
Wielościany foremne

Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi
i wszystkie kąty dwuścienne wyznaczone przez ściany są równe.

Wielościany foremne: czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan, dwudziestościan…

Czworościan (tetraedr)

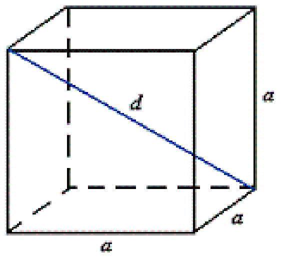
Ma 4 ściany trójkątne, 4 wierzchołki, 6 krawędzi.



$$P = \sqrt{3}a^2$$
$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

Sześcian (heksaedr)

Ma 6 ścian kwadratowych, 8 wierzchołków, 12 krawędzi.

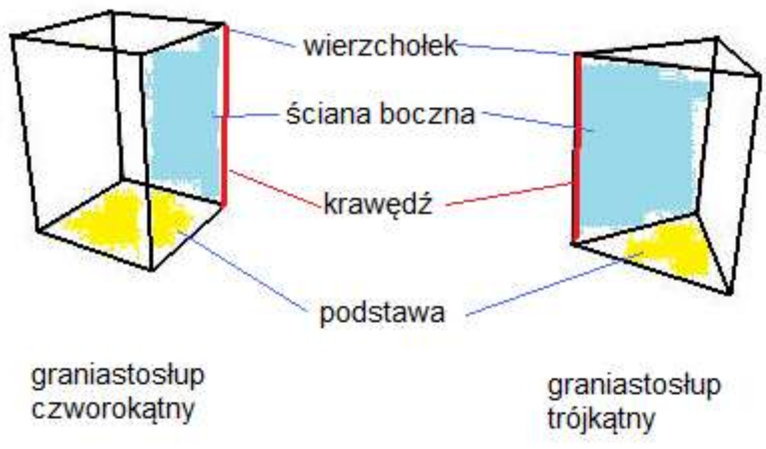


$$P = 6a^2$$
$$V = a^3$$

Graniastosłupy

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych,
a pozostałe ściany są równoległobokami.

Graniastosłup – wielościan, którego wszystkie wierzchołki są położone na dwóch równoległych płaszczyznach, zwanych podstawami graniastosłupa i którego wszystkie krawędzie leżące poza tymi podstawami są do siebie równoległe.



Podstawy są równoległe
Ściany zawarte w płaszczyznach podstaw nazywamy **podstawami graniastosłupa**.
Pozostałe ściany są równoległobokami i nazywamy je **ścianami bocznymi graniastosłupa**.

Graniastosłup, którego podstawą jest *n*-kąt, nazywamy graniastosłupem *n*-kątnym.

Wysokość H graniastosłupa to odcinek zawarty w prostej prostopadłej do jego podstaw, którego końcami są punkty wspólne tej prostej
z płaszczyznami zawierającymi podstawy graniastosłupa.

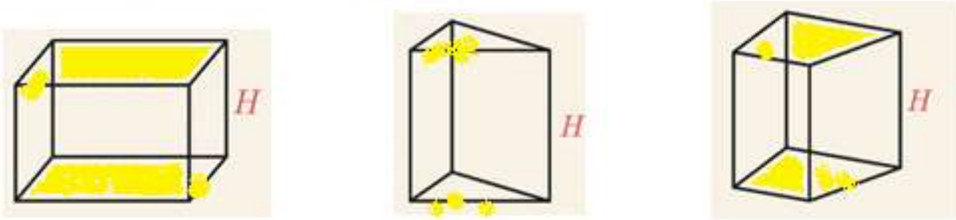
Przekątną graniastosłupa nazywamy każdy odcinek, którego końcami są wierzchołki obu podstaw graniastosłupa i który nie zawiera się w żadnej ze ścian graniastosłupa.

Wśród graniastosłupów wyróżniamy **graniastosłupy proste i pochyłe**

Graniastosłup prosty to figura przestrzenna, której podstawy są przystającymi wielokątami, a wszystkie ściany boczne są prostokątami.

Graniastosłup prosty to graniastosłup o prostokątnych ścianach bocznych – ściany boczne są wówczas prostopadłe do podstawy.
W przeciwnym wypadku jest to tzw. graniastosłup pochyły.

Graniastosłupy proste



Graniastosłup prosty to rodzaj wielościanu. Podstawy graniastosłupa prostego to dwa przystające i równoległe wielokąty. Ściany graniastosłupa prostego to prostokąty prostopadłe do podstaw. Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Objętość:

$$V = P_p \cdot H$$

P_p – pole podstawy
H – wysokość

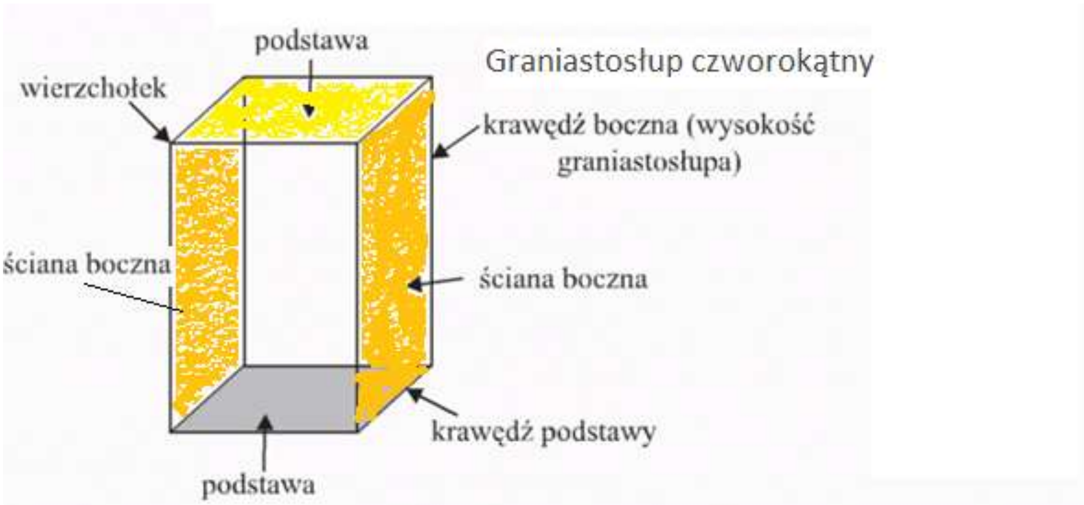
Pole całkowite:

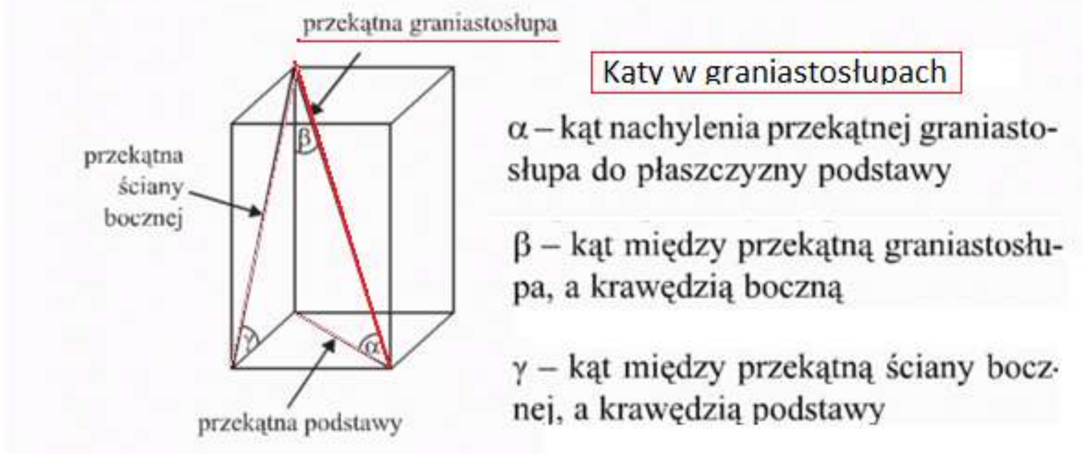
$$P_c = 2P_p + P_b$$

P_b – pole powierzchni bocznej
(suma pól wszystkich ścian bocznych)

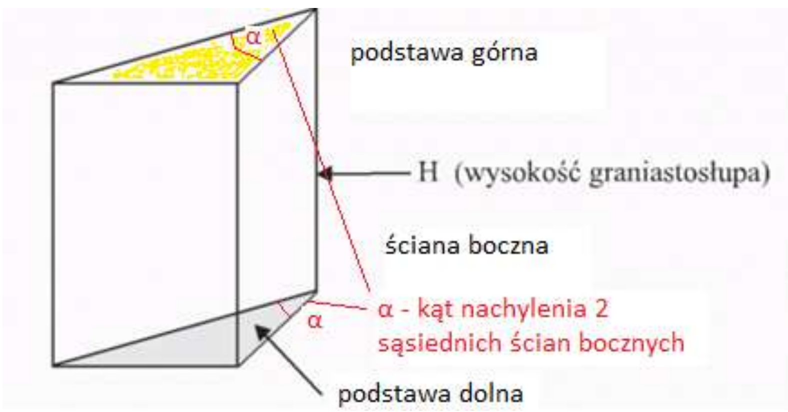
Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty o podstawach będących wielokątami foremnymi.

Graniastosłup czworokątny (podstawa graniastosłupa jest czworokątem).

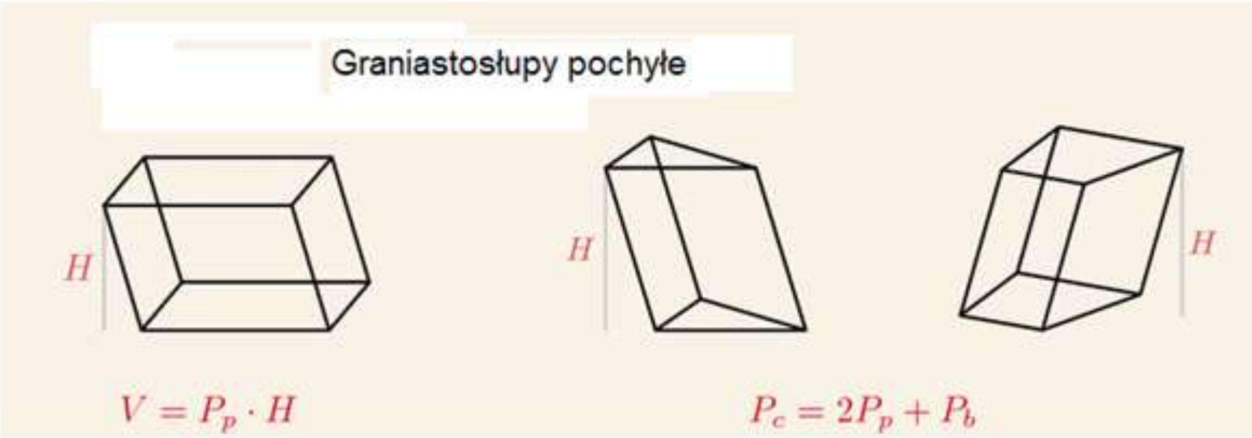




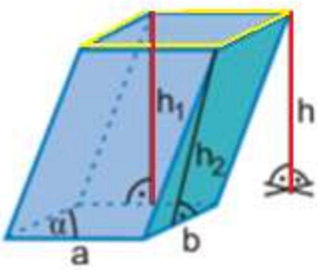
Graniastosłup trójkątny (podstawa graniastosłupa jest trójkątem).



Graniastosłup pochyły to graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw.



Równoległościan



$Pc = 2Pp + Pb$ $\boxed{Pb = 2ah_1 + 2bh_2}$

$\boxed{Pp = a*b*\sin\alpha}$

$Pc = \boxed{2*a*b*\sin\alpha} + \boxed{2ah_1 + 2bh_2} = 2(ah_1 + ah_2 + ab\sin\alpha)$

$\boxed{V = Pp*h}$

Graniastosłup **prosty**, którego podstawy są wielokątami foremnymi nazywamy **graniastosłupem prawidłowym**.

W graniastosłupie prawidłowym ściany boczne są figurami przystającymi.

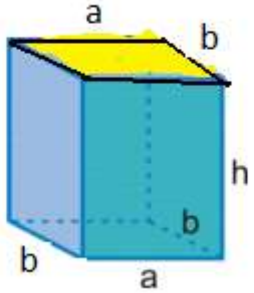
Jeżeli graniastosłup ma w podstawie wielokąt o n-kątach to:

- liczba ścian **s = n+2**
- liczba wierzchołków **w = 2n**
- liczba krawędzi **k= 3n**
- **n –** ilość wierzchołków (boków, kątów) podstawy

α

Prostopadłościan – graniastosłup prosty, którego wszystkie ściany są prostokątami

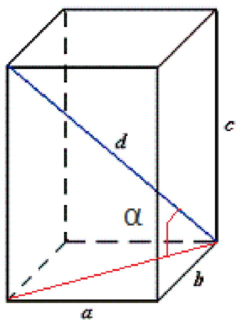
Prostopadłościan



$$P_b = 2(ah + bh),$$
$$P_c = 2(ah + bh + ab)$$
$$V = a \cdot b \cdot h$$

P_b = 2*(a+b)*H = (2a+2b)*H = L*H = 2p * H

Pole boczne = (Obwód podstawy) * H = 2p*H 2p – obwód podstawy = L



a, *b* - krawędzie podstawy
c - krawędĽ boczna
d - przekątna prostopadłościanu

α kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do płaszczyzny podstawy

Pole powierzchni całkowitej

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac$$

Objętość prostopadłościanu

$$V = abc$$

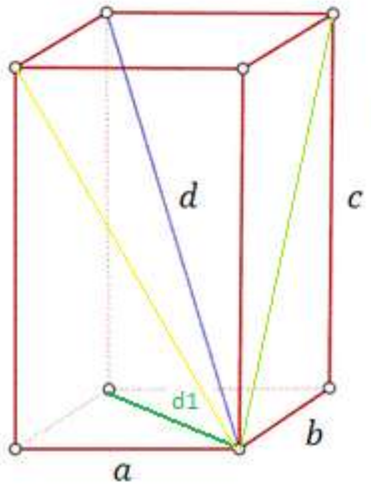
Długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości *a*, *b* i *c*

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

H = c – wysokość prostopadłościanu
P = 2Pp + Pb - pole całkowite
P = 2ab + 2ac + 2bc
V = a*b*H - objętość prostopadłościanu

Prostopadłościan jest szczególnym rodzajem graniastosłupa.

Każda jego ściana jest prostokątem,
a dowolne dwie ściany są do siebie równoległe, albo prostopadłe.



Przekątna prostopadłoscianu $\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Przekątna podstawy $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$

Przekatne ścian bocznych

$d2 = \sqrt{(a^2 + c^2)}$

$d3 = \sqrt{(b^2 + c^2)}$

Pole powierzchni prostopadłościanu

$P_c = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$

$\boxed{\text{Objętość} \quad V = abc}$

Pc = 2*Pp + Pb

Pp = a*b

2Pp = 2ab

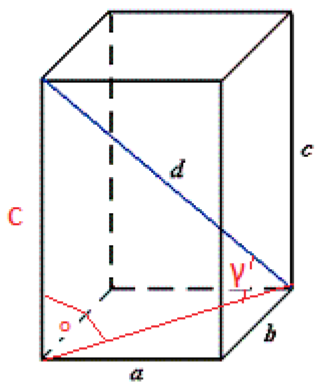
Pb = L*H = 2p*H = (2a+2b)*c = 2ac + 2bc

$\boxed{Pc = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)}$

W podstawie: prostokąt o wymiarach **a * b**

Liczba ścian	6
Liczba wierzchołków	8
Liczba krawędzi	12

Prostopadłościan



$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac$$

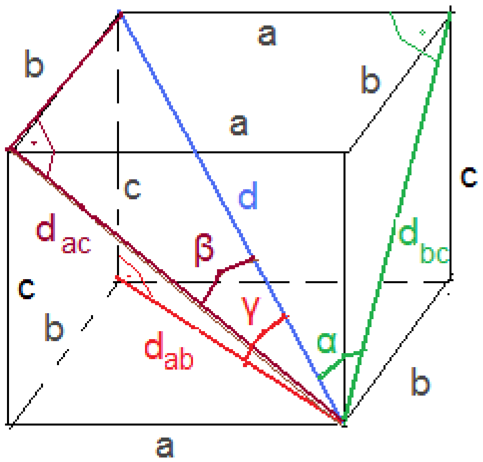
$$V = abc$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

c/d = sin γ

PROSTOPADŁOŚCIAN

W podstawie: prostokąt o wymiarach a * b



Kąty między przekątną prostopadłościanu a ścianami

$\sin \alpha = a / d \qquad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$\operatorname{tg} \alpha = a / d_{bc} \qquad d_{bc} = \sqrt{b^2 + c^2}$

$\sin \beta = b / d$

$\operatorname{tg} \beta = b / d_{ac} \qquad d_{ac} = \sqrt{a^2 + c^2}$

$\sin \gamma = c / d$

$\operatorname{tg} \gamma = c / d_{ab} \qquad d_{ab} = \sqrt{a^2 + b^2}$

H = c – wysokość prostopadłościanu

Liczba ścian	6
Liczba wierzchołków	8
Liczba krawędzi	12

$\boxed{P = 2Pp + Pb}$ pole całkowite

Pp = a*b; Pb = L*H = L *c = 2(a+b) * c

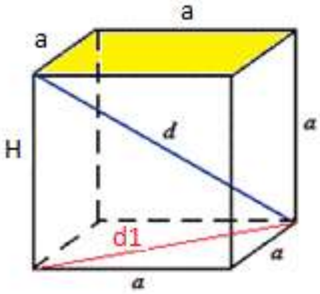
$\boxed{P = 2ab + 2ac + 2bc = 2*(ab + ac + bc)}$ = 2ab + 2(a+b) * c = 2ab + L*c ;

L = 2a + 2b = - obwód podstawy

$\boxed{\mathbf{V = Pp * H = abc}}$ objętość prostopadłościanu

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ Przekątna prostopadłoscianu

Sześcian – graniastosłup prosty, którego <u>wszystkie ściany są przystającymi kwadratami</u>
Szczególny przypadek prostopadłościanu.



a - krawędź sześcianu

H = a - wysokość

d - przekątna sześcianu

d1 - przekątna podstawy = a*√2

Pole powierzchni całkowitej $P_c = 6a^2$

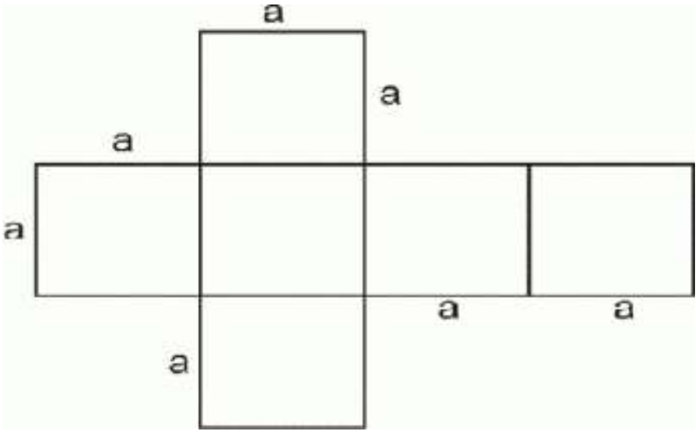
Objętość sześcianu $V = a^3$

Długość przekątnej sześcianu $\boxed{d = a\sqrt{3}}$

Długość promienia kuli wpisanej $r = \frac{1}{2}a$

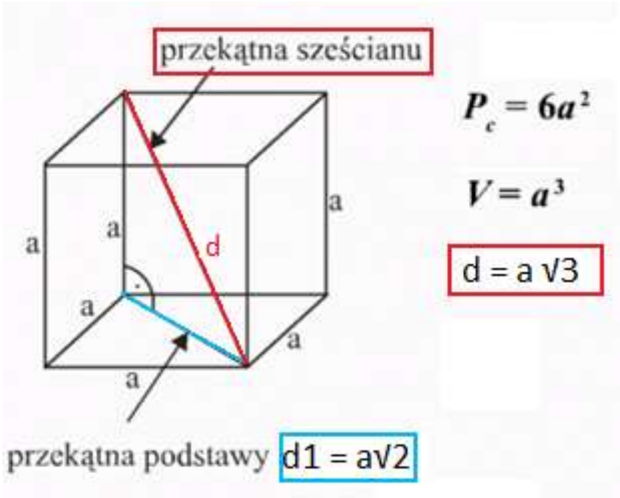
Długość promienia kuli opisanej $R = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Siatka sześcianu



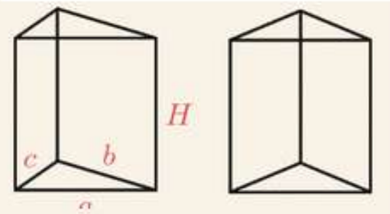
Sześcian

W podstawie: kwadrat a x a
Liczba ścian: 6
Liczba wierzchołków: 8
Liczba krawędzi: 12



√3

Graniastosłup trójkątny

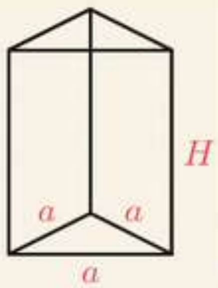


a, b, c – długości krawędzi podstawy
H – wysokość

Graniastosłup trójkątny ma 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków.

Graniastosłup prawidłowy trójkątny – w podstawie ma trójkąt równoboczny

Graniastosłup prawidłowy trójkątny



$$P_{pc} = 3ah + 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V = P_p h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} h$$

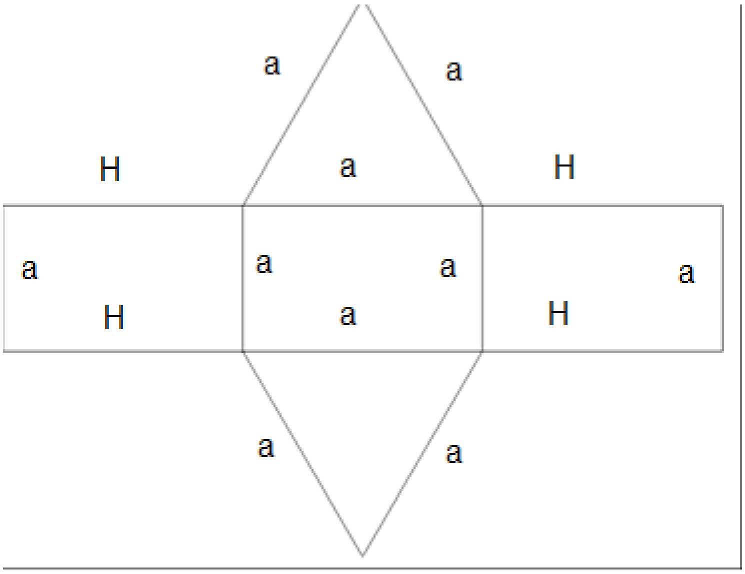
Graniastosłup prawidłowy trójkątny ma w podstawie trójkąt równoboczny.

Objętość i pole całkowite liczymy tak samo jak dla wszystkich graniastosłupów:

$$V = P_p \cdot H \qquad P_c = 2P_p + P_b$$

H – wysokość
P_p – pole podstawy (trójkąta)
P_b – pole powierzchni bocznej (suma pól prostokątów)

Siatka



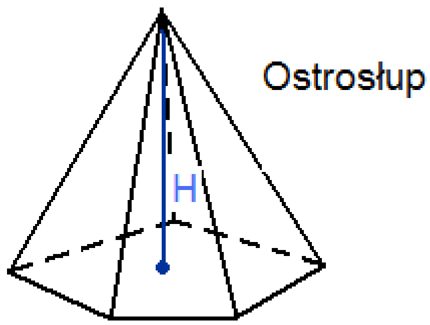
Siatka graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

Ostrosłup

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedna ściana, zwana podstawą ostrosłupa, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane ścianami bocznymi ostrosłupa, są trójkątami o wspólnym wierzchołku

Wspólny wierzchołek ścian bocznych ostrosłupa nazywamy **wierzchołkiem ostrosłupa**.
Rzut prostokątny wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy nazywamy **spodkiem wysokości ostrosłupa**.
Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa ze spodkiem wysokości ostrosłupa.

Ostrosłup może mieć w podstawie dowolny wielokąt.
Mówimy, że ostrosłup jest **prawidłowy** jeżeli ma w podstawie wielokąt foremny.



Sumę powierzchni wszystkich ścian bocznych ostrosłupa nazywamy **powierzchnią boczną graniastosłupa**.

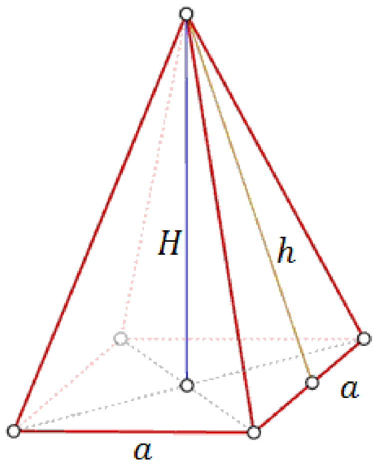
Sumę powierzchni bocznej i podstawy ostrosłupa nazywamy **powierzchnią całkowitą ostrosłupa**.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa o polu podstawy $\mathbf{P_p}$
i polu powierzchni bocznej $\mathbf{P}_b$ jest równe:
$\mathbf{P_c = P_p + P_b}$

Objętość ostrosłupa o polu podstawy $\mathbf{P_p}$ i wysokości **H** jest równa
$V = 1/3 * P_p * H$

Ostrosłup prawidłowy czworokątny - to taki ostrosłup, który ma w podstawie czworokąt foremny, czyli kwadrat.
Wierzchołek takiego ostrosłupa leży dokładnie nad środkiem podstawy.
W związku z tym ostrosłup prawidłowy czworokątny ma cztery identyczne ściany boczne, które są trójkątami równoramiennymi.

Spodek wysokości ostrosłupa leży na przecięciu przekątnych kwadratu w podstawie.



Wzór na pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego czworokątnego:

$P_c = P_p + P_b = a^2 + 4 \cdot 1/2 * a * h = a^2 + 2 * a * h$

gdzie:

P_p - pole podstawy ostrosłupa

P_b - suma pól ścian bocznych ostrosłupa

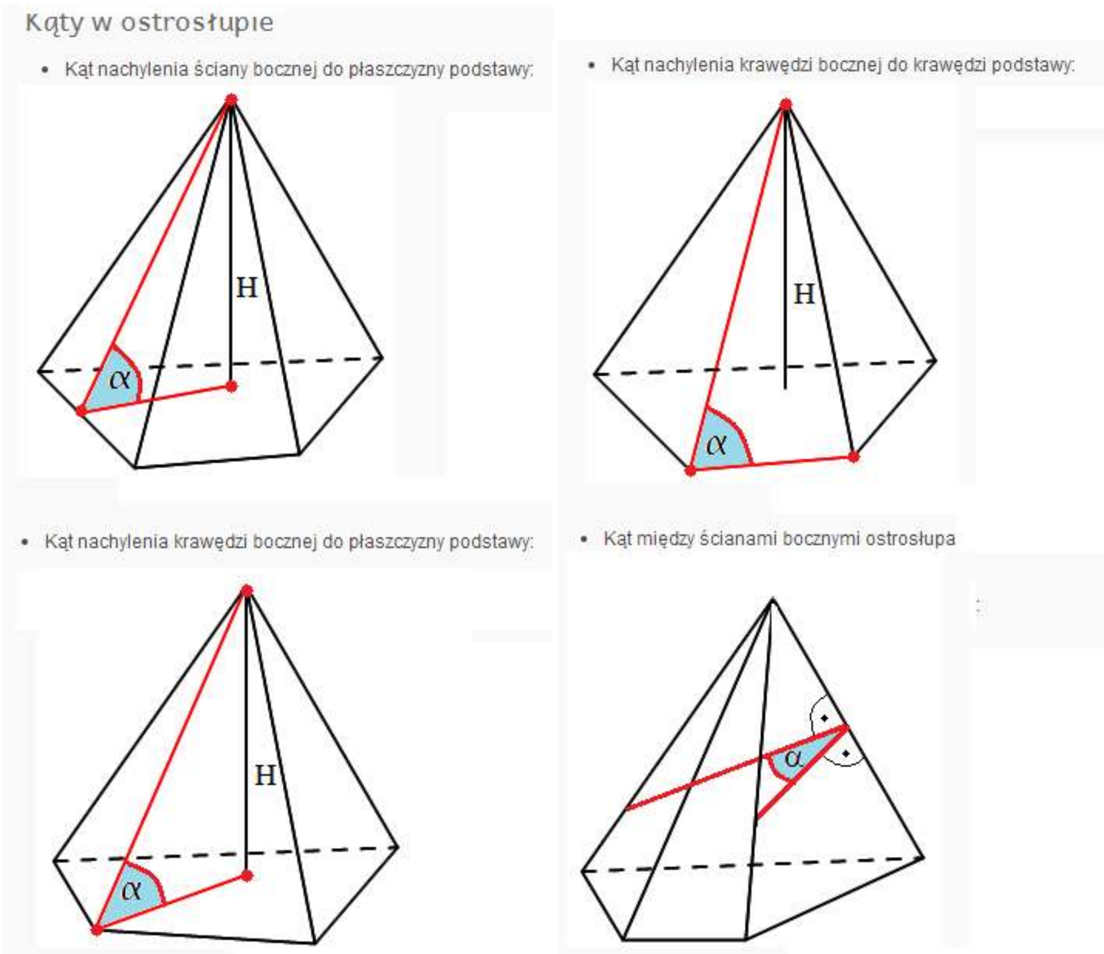
Wzór na objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego:

$V = 1/3 \cdot P_p \cdot H = 1/3 * a^2 * H$

gdzie:

P_p - pole podstawy ostrosłupa

H - wysokość ostrosłupa

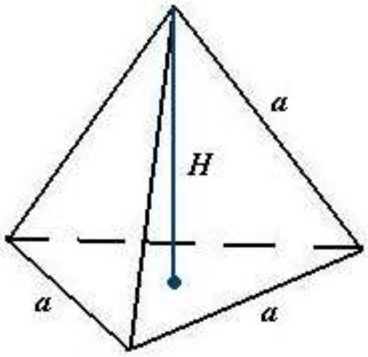


Ostrosłupy

Pole powierzchni całkowitej: $P_c = P_b + P_p$

Objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$

Czworościan foremny



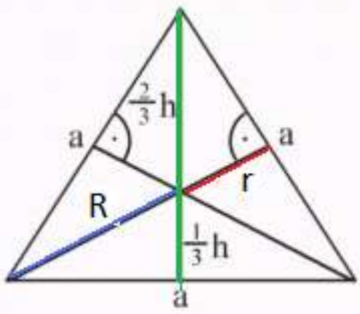
$$P_c = a^2\sqrt{3}$$
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Czworościan foremny – podstawa i ściany boczne – trójkąty równoboczne o krawędzi **a**

$Pc = a^2 * \sqrt{3}$ $V = 1/3 * Pp * H$ $V = 1/3 * a^3 * \sqrt{12}$

Trójkąt równoboczny – podstawa ostrosłupa prawidłowego trójkątnego lub czworościanu foremnego

trójkąt równoboczny:

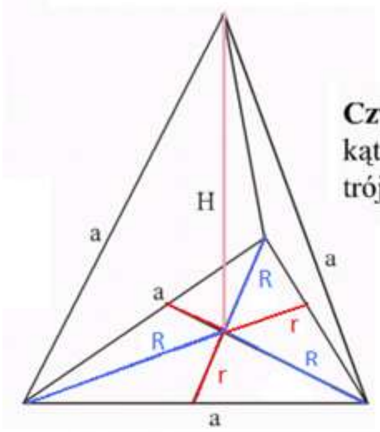


$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



Czworościan foremny – ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.

H^2 = a^2 - R^2 = a^2-3*a^2/9 = 2a^2/3

$$H = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

Wysokość czworościanu: $H = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

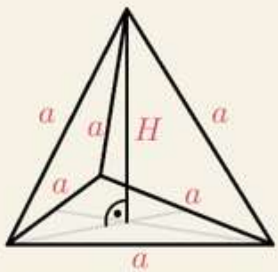
Objętość czworościanu:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$$

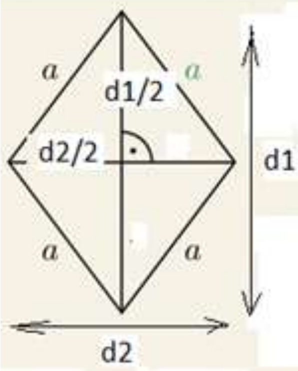
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{18}}{36} = \frac{a^3\sqrt{9 \cdot 2}}{36} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{36}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



Ostrosłup o podstawie rombu – dane przekątne



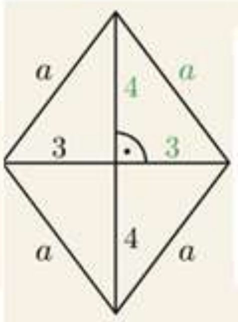
Obwód i pole rombu o danych przekątnych d1 i d2

a^2 = (d1/2)^2 + (d2/2)^2

a^2 = (d1^2 + d2^2)/4

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

L = 4a
P = d1*d2/2



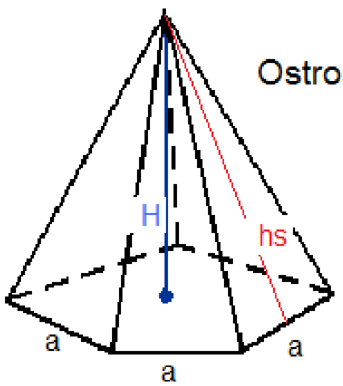
Przykład

Oblicz obwód i pole rombu, którego przekątne mają długość 6 cm i 8 cm.

$$a^2 = 4^2 + 3^2$$
$$a^2 = 16 + 9$$
$$a^2 = 25$$
$$a = 5$$

$$P = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24\,\text{cm}^2$$

Ostrosłup prawidłowy n–kątny
(podstawa ma n wierzchów, n boków, n kątów)



Ostrosłup prawidłowy n-kątny

V = 1/3 * Pp *H

Pb = 1/2 * a * hs = n/2 * a * hs

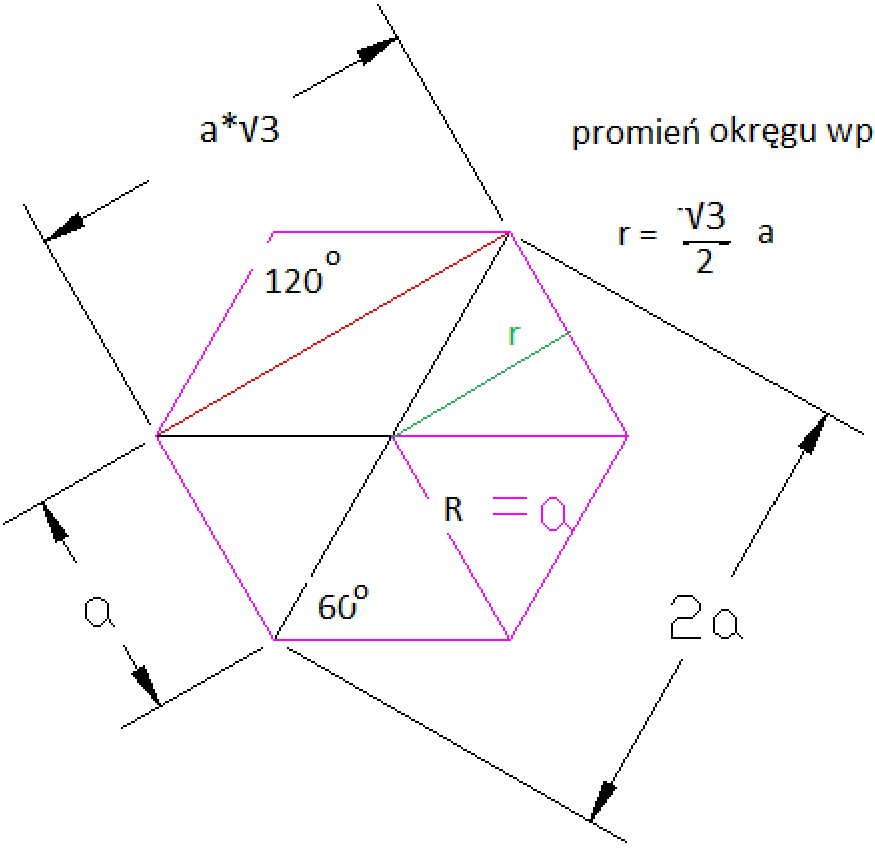
P = Pp + Pb

Pb = n/2 * a * hs   P = Pp + Pb   V = 1/3 * Pp * H

Sześciokąt foremny – podstawa ostrosłupa prawidłowego 6-kątnego

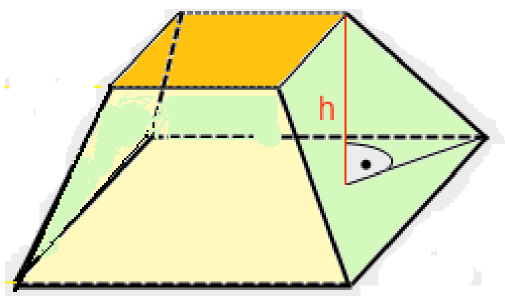
R = a,   r = √3/2 * a

Przekątne: najdłuższa: d1=2a,   krótsza: d2= a*√3



Pp = 6 * ½ * a * √3/2 * a = **6 * a² * √3/4 = a² * √3/2**

Ostrosłup ścięty



Pc = Pp1 + Pp2 + Pb

V = 1/3*h*(Pp1 + Pp2 + √(Pp1*Pp2)

Zależności między liczbą wierzchołków, krawędzi i ścian w wielościanach

w – k + s = 2

Graniastosłup:

$w = 2n$ $k = 3n$ $s = n+2$

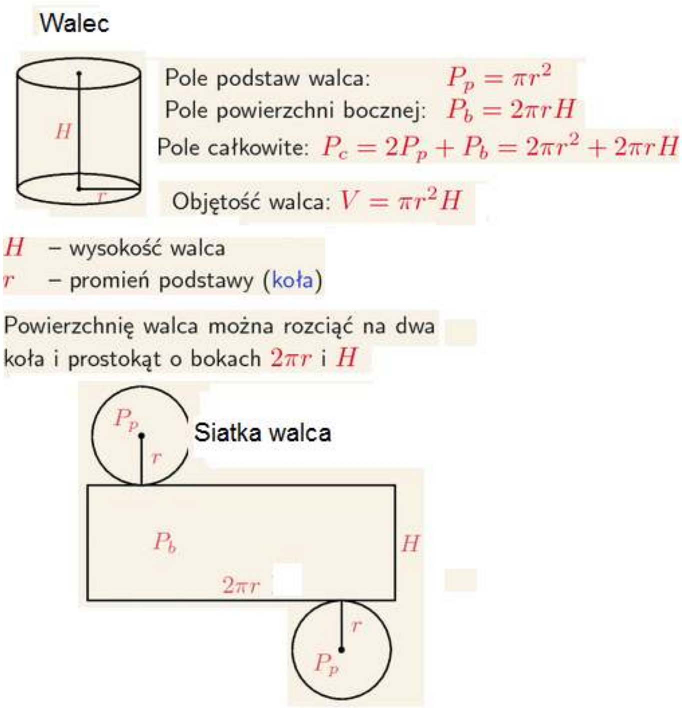
Ostrosłup:

$w = n+1$ $k = 2n$ $s = n+1$

Skala podobieństwa brył:

$P_{F1}/P_{F2} = k^2$ $V_{P1} / V_{P2} = k^3$

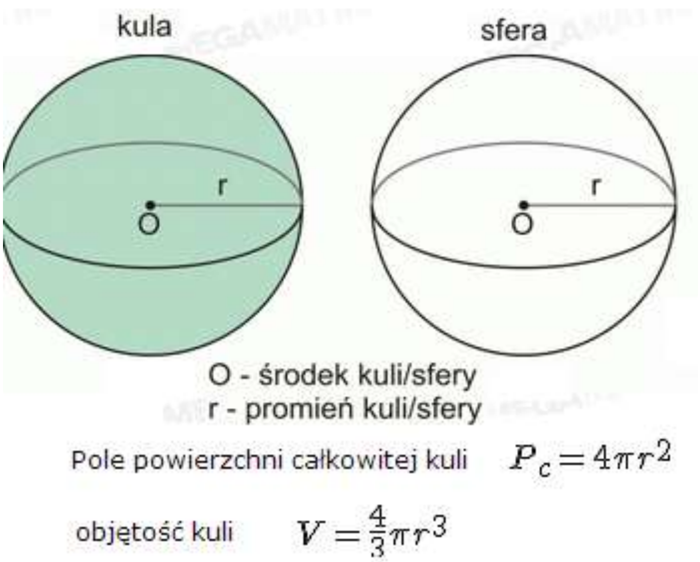
Walec



Walec:

$Pp = \pi * r^2$ $Pb = 2* \pi * r * H$ $Pc = 2*Pp + Pb = 2 \pi r (H + r)$

Kula

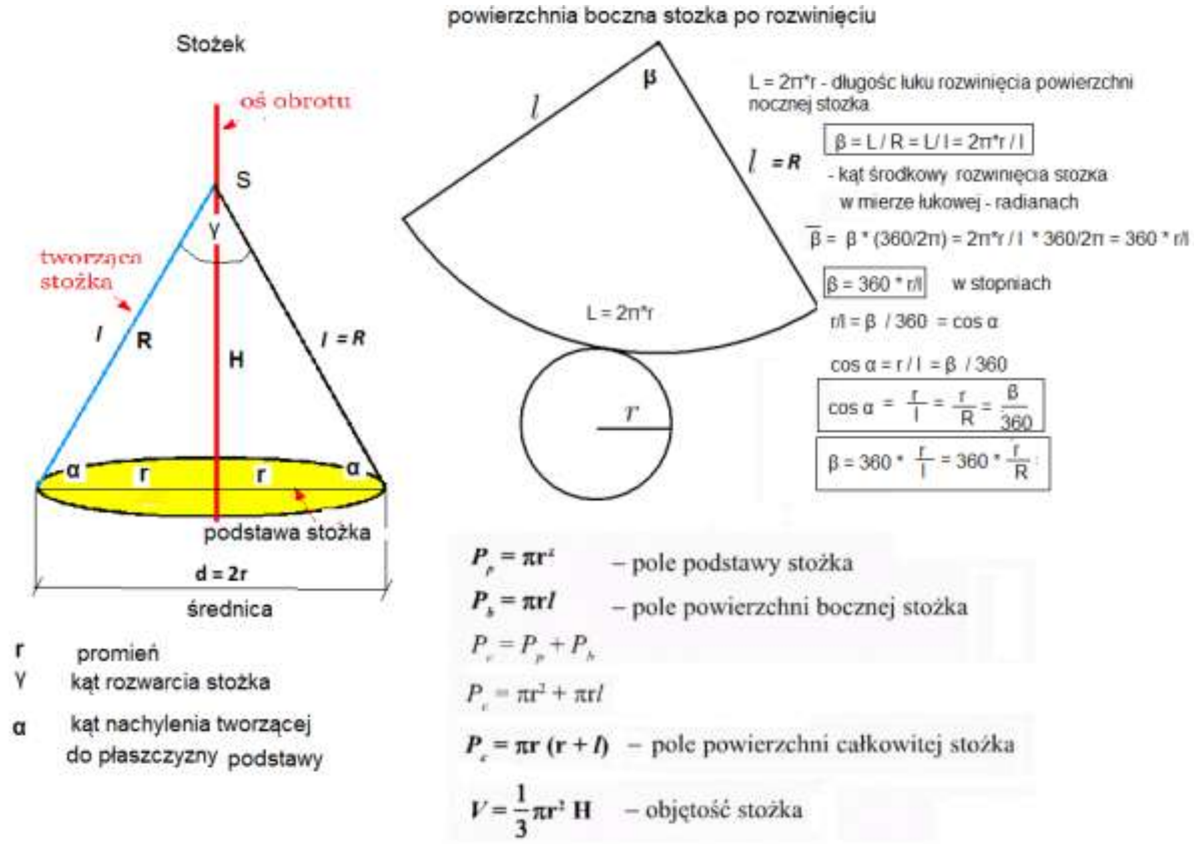


Kula:

$P = 4/3 * \pi * R^2 = \pi * d^2$ $V = 4/3 * \pi * R^2 = 1/6 * \pi * d^2$

Stożek

r – długość promienia podstawy, **l = R** – długość tworzącej stożka



$Pp = \pi r^2$

$Pb = \pi * r * l$

$Pc = Pp + Pb = \pi r^2 + \pi * r * l = \pi r (r + l)$

$V = 1/3 * Pp * H$

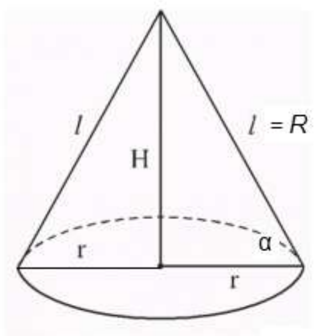
$B[rad] = 2\pi r/l$

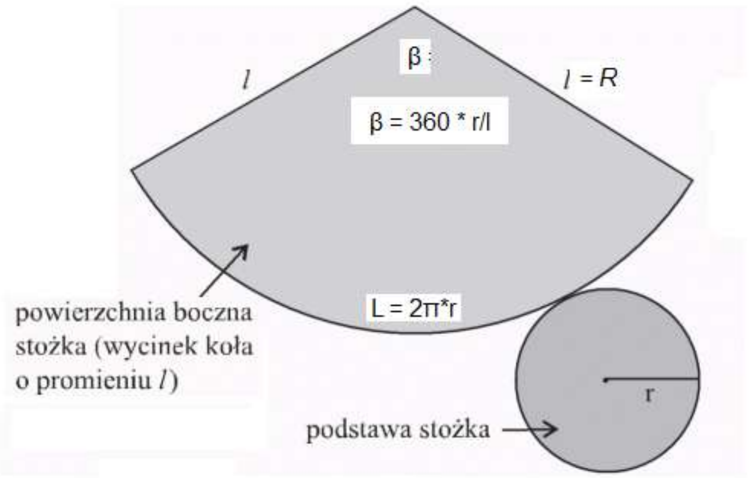
$\beta^o = 2\pi r/l * (360/ 2\pi) = 360^o * r/l$

$\beta^o = 360^o * r/l$

$\cos \alpha = r/l = \beta / 360^o$

Stożek





$\boxed{L = 2\pi r}$ - obwód podstawy stozka

$\boxed{Pp = \pi r^2}$ – pole podstawy stożka

$\boxed{P_b = \pi r l}$ – pole powierzchni bocznej

$\boxed{P_c = P_p + P_b}$ pole całkowite

$P_c = \pi r^2 + \pi r l$

$\boxed{P_c = \pi r\,(r + l)}$ – pole powierzchni całkowitej stożka

$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 H}$ – objętość stożka

L= β*R = β*l = 2πr - długość łuku rozwinięcia stozka równej obwodowi podstawy

L = 2π*r - długośc łuku rozwinięcia powierzchni nocznej stozka

$\overline{\beta}$ = L / R = L/ l = 2π*r / l - kąt środkowy rozwinięcia stozka w mierze łukowej - radianach

β = β * (360/2π) = 2π*r / l * 360/2π = 360 * r/l

β = 360 * r/l w stopniach

r/l = β / 360 = cos α

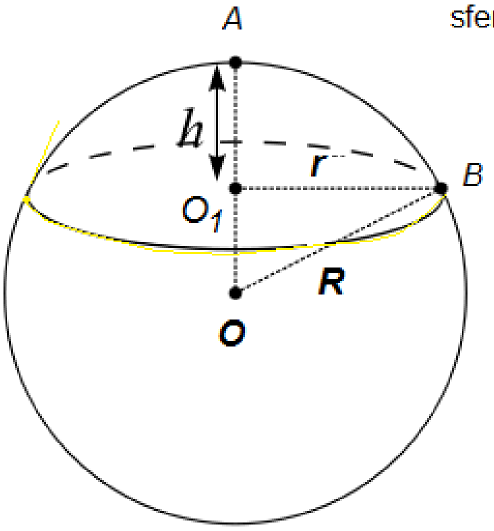
cos α = r / l = β / 360

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{r}{l} = \frac{r}{R} = \frac{\beta}{360}}$$

$$\boxed{\beta = 360 * \frac{r}{l} = 360 * \frac{r}{R}}$$

Czasza kuli

Czasza kuli



Czasza kuli - każda z części, na które dzieli sferę płaszczyzna tnąca

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2 = h\,(2R - h) = (2R - h) * h$$

$$\boxed{r = \sqrt{(2R - h) * h}}$$

$$\boxed{P = 2\,\pi\,R\,h}$$

r - promień podstawy czaszy
R - promień kuli
h - wysokość czaszy
P - pole powierzchni czaszy

$|OA| = |OB| = R$
$|O1\ B| = r$
$|O\ O1| = R - h$