Rachunek prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Spis treści

Rachunek prawdopodobieństwa

Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się badaniem praw rządzących zjawiskami przypadkowymi. Uczy w jaki sposób ze znajomości tych praw można uzyskać informacje na temat szans zajścia interesujących nas zdarzeń i pozwala przewidywać przebieg tych zjawisk.
Rachunek prawdopodobieństwa jest dziedziną matematyki zajmującą się badaniem zjawisk losowych (modeli zjawisk losowych) i praw rządzących tymi zjawiskami.
Rachunek prawdopodobieństwa pomaga obliczyć szansę zaistnienia pewnego określonego zjawiska.
Początki rachunku prawdopodobieństwa związane są z grami losowymi
(do których należy np. gra w kości) i chęcią poznania szansy wygranej.
Rachunek prawdopodobieństwa zaczął się kształtować w XVI wieku gdy zaczęto zauważać pewne prawidłowości w grach hazardowych.
Pierwszy dostrzegł je i próbował opisać matematyk włoski Geronimo Cardano (1501-1576).
Poważniejszy rozwój rachunku prawdopodobieństwa nastąpił w wieku XVII dzięki pracom
P. de Fermat'a i B. Pascal'a (matematycy francuscy).
Za twórcę rachunku prawdopodobieństwa jako działu matematyki uważamy szwajcarskiego matematyka Jakuba Bernoullie'go, który opracował te zagadnienia w wieku XVII.

Rachunek prawdopodobieństwa bazuje na **kombinatoryce**.

Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

Pojęcie, oznaczenia	*Opis pojęcia*	*Przykłady*
Doświadczenie losowe *- czynność którą wykonujemy*	Doświadczenie, które może być powtarzane wielokrotnie w jednakowych lub zbliżonych warunkach i którego wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć. W praktyce każda czynność, która może zakończyć się kilkoma nieprzewidywalnymi wynikami.	Rzut monetą (wynik: orzeł, reszka) Rzut kostką do gry (np. parzysta liczba oczek, wyrzucono 4 oczka) Losowanie kul z urny (np. czerwona) Wyjęcie karty z talii (karo, as, pik..) Wybór dnia tygodnia (np. sobota) Losowanie totolotka (trafienie 3 z 49 liczb)

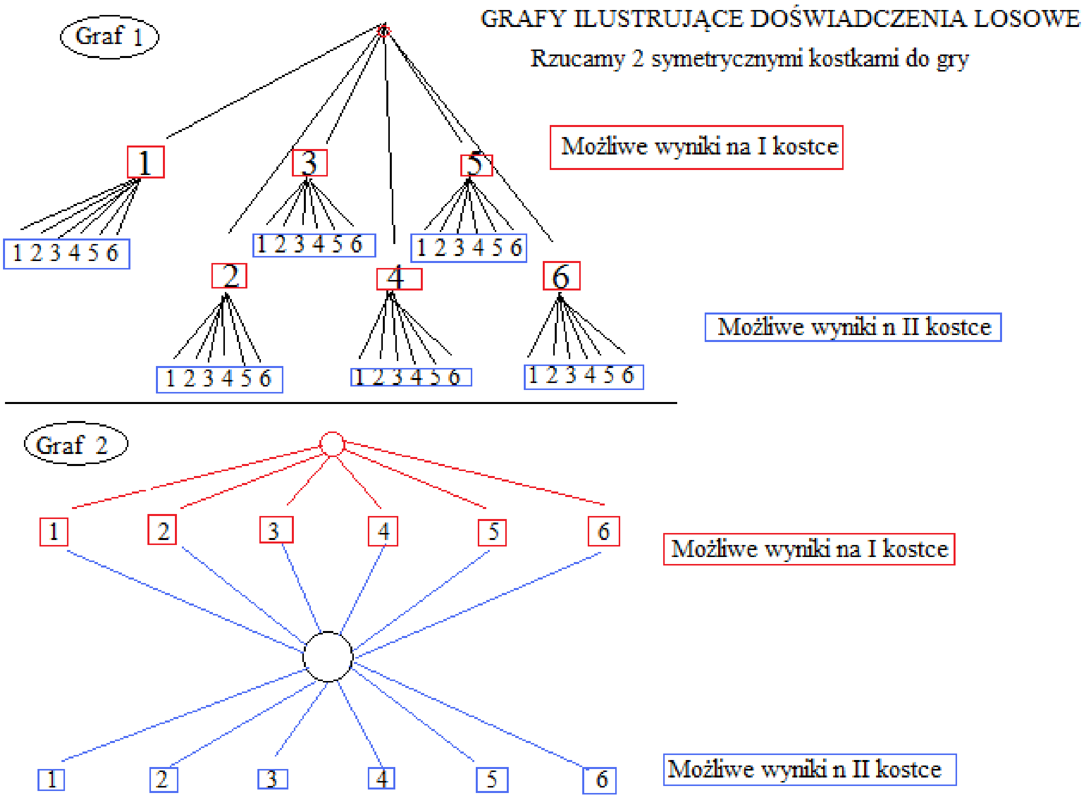
		Bezawaryjna praca jakiegoś urządzenia
Zdarzenie elementarne **ω** *Zdarzenie elementarne jest to najprostszy (pojedynczy) wynik doświadczenia losowego.*	Każdy możliwy wynik doświadczenia losowego. *Zdarzenie (tylko jedno!) jakie może wydarzyć się w doświadczeniu losowym.* *Liczbę zdarzeń elementarnych zdarzenia A oznaczamy zwykle jako $\|A\|$* *lub A nakreślone.*	Wyrzucenie na kostce 6 oczek. Wypadła reszka w rzucie monetą. W rzucie monetą są 2 zdarzenia elementarne: wypadł orzeł: $\omega_1 = \{O\}$: Rzucamy 2 symetrycznymi monetami: $\omega_1 = \{O, O\}$, , $\omega_2 = \{O, R\}$, $\omega_3 = \{R, O\}$, $\omega_4 = \{R, R\}$,
Zbiór zdarzeń elementarnych - przestrzeń zdarzeń elementarnych **Ω**	Zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych **ω** dla danego doświadczenia losowego – oznaczamy **Ω** Przestrzeń zdarzeń elementarnych można zapisać w postaci: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, .. \omega_n\}$	W rzucie monetą $\Omega = \{O, R\}$ W rzucie 2 monetami: $\Omega = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\}$ W rzucie kostką: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
Zdarzenie losowe **A** zbiór jednego lub kilku zdarzeń elementarnych	Dowolny podzbiór wszystkich zdarzeń elementarnych - przestrzeni zdarzeń elementarnych **Ω** Nazywamy zdarzeniem losowym albo krótko zdarzeniem Zdarzenia losowe oznaczamy wielkimi literami alfabet: A, B, C, …	W rzucie 2 monetami, np. A – na jednej monecie wypadł orzeł O, a na drugiej reszka R Wypadła parzysta liczba oczek w rzucie kostką – $\{2, 4, 6\}$ Wybrano dzień powszedni.
Zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A Zdarzenie, które spełnia warunki zdarzenia losowego	Jeżeli A jest zdarzeniem losowym, to zdarzenie elementarne ω, takie, ze $\omega \in A$, nazywamy zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A	Np. wyrzucenie orła Wyrzucenie parzystej liczby oczek Wyrzucenie 6 na kostce
Zdarzenie pewne **$A = \Omega$**	Zdarzenie losowe, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne tworzące zbiór Ω	W rzucie monetą wypadł orzeł lub wypadła reszka $A = \{O, R\}$
Zdarzenie niemożliwe **$A = \varnothing$**	Zdarzenie losowe, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne należące do zbioru Ω	W rzucie moneta wypadła szóstka
Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A **A'**	Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A, nazywamy zdarzenie **A'**, któremu sprzyjają te zdarzenia elementarne przestrzeni Ω, które nie sprzyjają zdarzeniu A.	Niech Ω oznacza zbiór wszystkich możliwych wyników pojedynczego rzutu kostką $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zaś A niech oznacza zdarzenie "wypadła liczba oczek będąca liczbą pierwszą" $A = \{2, 3, 5\}$ Wówczas $A' = \{1, 4, 6\}$
Moc zbioru – liczba elementów skończonego zbioru A **$\|A\|$**	Liczba elementów danego zbioru A Oznaczamy symbolicznie: $\|A\|$, n_A lub $\overline{\overline{A}}$	$\|\{\text{dni tygodnia}\}\| = 7$
Ilość zdarzeń elementarnych, moc zbioru $n(\Omega)$, **$\|\Omega\|$**	Liczba wszystkich możliwych zdarzeń, moc zbioru	$\|\{\text{dni powszednie}\}\|=5$
Ilość zdarzeń sprzyjających $n(A)$, **$\|A\|$**	Liczba zdarzeń sprzyjających, moc zbioru A	$\|A\| = \|\{2,4,6\}\|=3$

Działania na zdarzeniach

Działanie	Zapis działania	Opis
Suma zdarzeń A i B	**A ∪ B**	Zdarzenie, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A lub B
Iloczyn zdarzeń A i B	**A ∩ B**	Zdarzenie, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie A i B
Różnica zdarzeń A i B	**A \ B**	Zdarzenie, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A i niesprzyjające B
Zdarzenia rozłączne (wykluczające się) A i B	**A ∩ B = ∅**	Część wspólna zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym
Zdarzenie **A'** przeciwne do zdarzenia A	**A'** A'= Ω \ A A ∩ A' = ∅ A ∪ A' = Ω	Zdarzenie takie, że A'= Ω \ A Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia niemożliwego jest zdarzenie pewne
Klasyczna definicja prawdopodobieństwa	**P(A) = |A| / |Ω|**	|A| - liczba elementów zbioru A, |Ω| - liczba elementów zbioru Ω

Liczba wyników doświadczenia losowego. Reguła mnożenia i reguła dodawania

Przedstawienie wyników rzutu 2 kostkami w postaci grafów – drzewa stochastyczne



Liczba wszystkich możliwych zdarzeń (moc zbioru): $|\Omega| = 6*6 = 36$

Przedstawienie wyników rzutu 2 kostkami w postaci tabeli

		Możliwe wyniki na **II** kostce					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Możliwe wyniki na **I** kostce	**1**	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

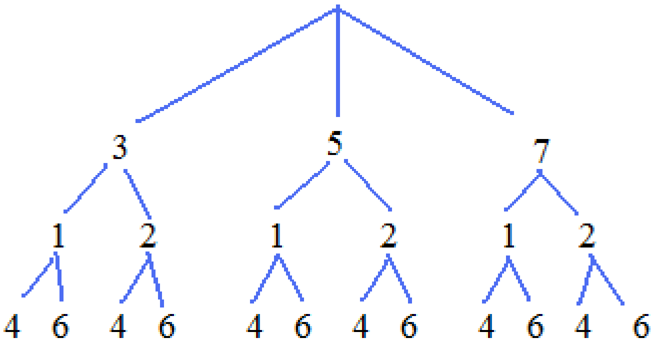
Liczba wszystkich możliwych zdarzeń (moc zbioru): $|\Omega| = 6*6 = 36$

Liczba wszystkich możliwych zdarzeń (moc zbioru) oznaczamy **$|\Omega|$**
Liczbę elementów skończonego zbioru A oznaczamy symbolicznie **$|A|$** lub **n_A**

Reguła mnożenia
Jeżeli wynik pewnego doświadczenia losowego zależy od kolejno podejmowanych decyzji,
to liczba wszystkich różnych wyników tych decyzji równa się **$n_1 * n_2 * \ldots n_k$**
jeżeli:
n_1 – liczba możliwości wyborów przy podejmowaniu **I** decyzji
n_2 - liczba możliwości wyborów przy podejmowaniu **II** decyzji
….
n_k - liczba możliwości wyborów przy podejmowaniu **k**-tej decyzji, czyli decyzji ostatniej

Przykład:

Ze zbiorów A1 = {3, 5, 7}, A2 = {1, 2}, A3 = {4, 6} wybieramy kolejno po jednej cyfrze i tworzymy liczbę 3-cyfrową. Pierwszą cyfrę wybieramy ze zbioru A1, drugą z A2, trzecią ze zbioru A3.



Ilość możliwych zdarzeń elementarnych tego doświadczenia: |Ω| = 3*2*2 = 12

Ω = {314, 316, 324, 326, 514, 516, 524, 526, 714, 716, 724, 726}

Ilość liczb, których cyfra setek jest cyfra 3 lub cyfra 7: |A| = 1*2*2 + 1*2**2

Liczby: 314, 316, 324, 326, 714, 716, 724, 726

Reguła mnożenia

Jeżeli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba różnych par (x, y), takich, że x ∈ A oraz y ∈ B, jest równa m*n

Przykład 1:

Rzucamy 2 monetami: 2-złotówkową i 5-złotówkową:

Oznaczenia:

o – otrzymanie orła na monecie 2-zł, r – reszki na monecie 2 zł

O - otrzymanie orła na monecie 5-zł, R – reszki na monecie 5 zł

Możliwe wyniki doświadczenia: oO, oR, rO, rR

Ilość zderzeń (par) = 2*2 = 4

Przykład 2:

Rzucamy 2 sześciennymi kostkami do gry: niebieską i czarną.

Możliwe wyniki:

1 1 2 1 3 1 4 1 5 1 6 1

1 2 2 2 3 2 4 3 5 2 6 2

…

1 6 2 6 3 6 4 6 5 6 6 6

Liczba zdarzeń: 6 * 6 = 36 (rozróżniamy wyniki takie jak 2 3 i 3 2)

Przykład 3:

Ile jest punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna x należy do zbioru: A = {1, 2, 3, 4, 5}, a druga do zbioru B = {1, 2, 3}?

|A| = 5, |B| = 3, |A|*|B| = 5*3 = 15

Reguła mnożenia sformułowana bardziej ogólnie

Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu **n** decyzji,

przy czym

decyzję pierwszą można podjąć na $\mathbf{k_1}$ sposobów,

drugą na $\mathbf{k_2}$ sposobów, …,

n-tą na k_n sposobów,
to takiego wyboru można dokonać na
$k_1 * k_2 * \ldots * k_n$ sposobów

Przykład
Ile może być numerów rejestracyjnych mających na początku 2 litery, a następnie 5 cyfr,
jeśli mogą w nich występować tylko litery WA oraz cyfry 1, 4, 6, 8 (litery i cyfry mogą się powtarzać)?
2 pozycje na litery, na każdej 2 możliwości: $2*2 = 2^2$,
5 pozycji ma cyfry, na każdej 4 możliwości: $4*4*4*4*4 = 4^5 =$
Ilość numerów: 2*2*4*4*4*4 *4 = 2^2 * 4^5 = 4*1024 = 4096

Zasada mnożenia
Jeśli wybór zależy od podjęcia kolejno n decyzji, przy czym podejmując
pierwszą decyzję, mamy d_1 możliwości,
drugą d_2 możliwości, …
podejmując n-tą decyzję mamy d_n możliwości,
to wybór ten może być dokonany na
$d_1 * d_2 * \ldots d_n$ sposobów

Przykład:
Mamy 2 długopisy i 3 ołówki.
*Na ile sposobów można wybrać zestaw złożony z długopisu **i** ołówka?*
Zasada mnożenia:
Długopis można wybrać na 2 sposoby, ołówek na 3 sposoby.
Zestaw można wybrać na **2*3 = 6** sposobów

Zasada dodawania
Jeżeli wybór polega na podjęciu jednej z n decyzji, przy czym podejmując tę decyzję,
mamy odpowiednio d1, d2, … dn możliwości, to wybór ten może być dokonany na
$d_1 + d_2 + \ldots d_n$ sposobów

Przykład:
Ile różnych wyrazów jednoliterowych lub dwuliterowych można utworzyć z wyrazu „kok”?
Zasada dodawania:
Wyrazy jednoliterowe: k, o – 2 wyrazy
Wyrazy 2-literowe: ko, ok., kk – 3 wyrazy
Liczba wszystkich wyrazów: 2 + 3 = 5

Reguła dodawania
Jeśli zbiory A i B są rozłączne, to liczba elementów zbioru A U B
równa się sumie liczby elementów zbioru A i liczby elementów zbioru B

Jeśli zbiory A i B są rozłączne to **|A U B| = |A| + |B|**

Przykład
Rzucamy 4 razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby 4-cyfrowej.
Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których suma cyfr jest równa 6?
Suma cyfr może być równa 6 w 2 przypadkach:

A. W zapisie liczby występuje trzy razy cyfra 1 oraz jeden raz cyfra 3. Są **4** takie liczby
   1113, 1131, 1311, 3111

B. W zapisie występują dwa razy cyfra 2 i dwa razy cyfra 1 Jest **6** takich liczb:
1122, 1212, 2112, 2121, 2211

Razem jest: 4 + 6 = 10

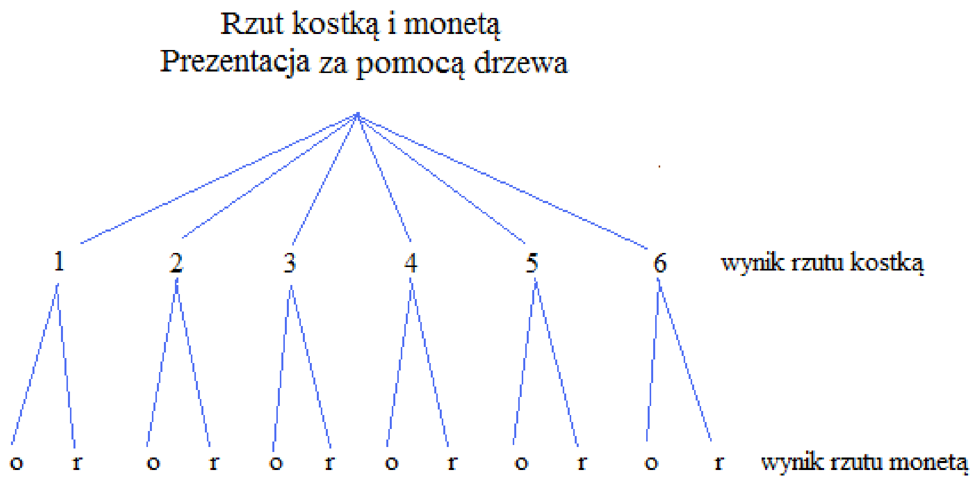
<u>Jeżeli obliczając liczbę możliwych wyników doświadczenia losowego,</u>
w toku rozumowania używamy <u>spójnika</u>:

i - to w obliczeniach wykonujemy <u>mnożenie</u>
lub - to w obliczeniach wykonujemy <u>dodawanie</u>

Prezentacja wyników za pomocą drzewa

<u>Przykład</u>

Rzucono kostką i monetą. Przyjmujemy, że wynikiem doświadczenia jest para (a, b), gdzie a jest liczbą oczek na kostce, zaś b – orłem lub reszką.
Ile jest możliwych wyników takiego doświadczenia?



Wyniki doświadczenia:
(1, o), (1, r), (2, o), (2, r), (3, o), (3, r), (4, o), (4, r), (5, o), (5, r), (6, o), (6, r)

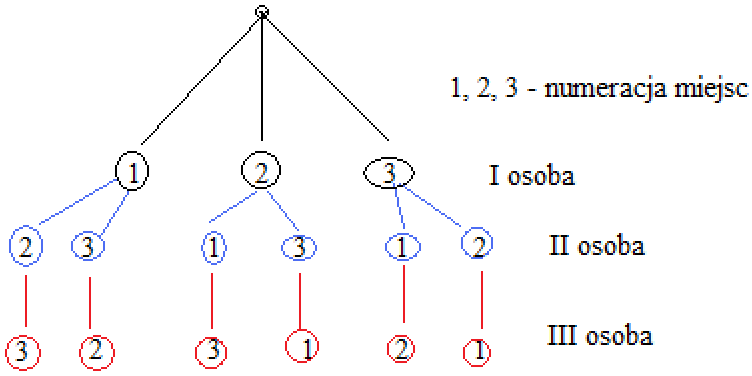
Wyników jest: 6 * 2 = 12

Obliczanie liczby oczekiwanych wyników zdarzenia losowego – przykłady

Liczbę oczekiwanych wyników można zliczać różnymi metodami, m. innymi:
- za pomocą grafu
- przez wypisanie wszystkich wyników
- za pomocą tabeli
- poprzez stosowanie reguły mnożenia i reguły dodawania

<u>Przykład</u>

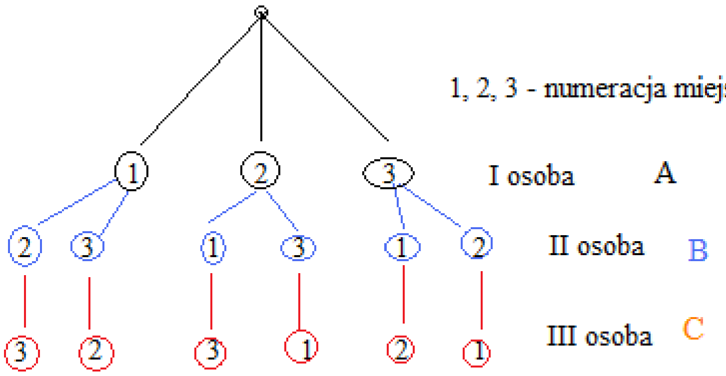
a) Na ile sposobów 3 osoby mogą stanąć w rzędzie lub usiąść na ławce mieszczącej 3 osoby?
Pierwsza osoba ma wybór 3 miejsc, druga ma wybór już tylko 2 miejsc,
a trzecia ma tylko wybór jednego, pozostałego miejsca



Możliwe wyniki:
(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1) 3*2*1 = 6 możliwości

|A| = 3*2*1 = 6

b) Na ile sposobów 3 osoby mogą usiąść przy okrągłym stole, z ponumerowanymi krzesłami



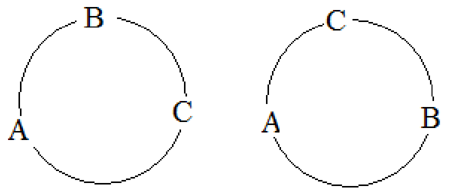
Możliwe wyniki:
(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1) 3*2*1 = 6 możliwości

Kolejność numerów w kolejce lub krzeseł dla osób A, B, C

(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (C, A, B), (C, B, A) - kolejność osób

Analogicznie jak wyżej. Osobie przyporządkowujemy krzesło.
Są 3 osoby i 3 miejsca. |B| = 3*1*1 = 6
bo
Pierwsza osoba ma wybór 3 miejsc, druga ma wybór już tylko 2 miejsc, a trzecia ma tylko wybór jednego, pozostałego miejsca.

c) Na ile sposobów 3 osoby mogą stanąć w koło i złapać się za ręce?
Osobie przyporządkowujemy sąsiadów. Jest 2 sąsiadów, dlatego liczba możliwości jest 2.



(B –> A –><- C –><- B -><- A),   (C-><- A –><- B –><- C -><-A)

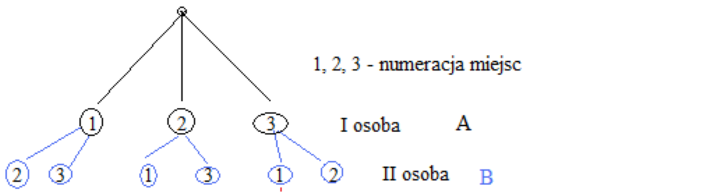
-> - prawa ręka, <- lewa ręka danej osoby

|C| = 2

<u>Przykład</u>

a) Na ile sposobów 2 osoby mogą usiąść na ławce mieszczącej 3 osoby?

   |A| = 3*2 = 6

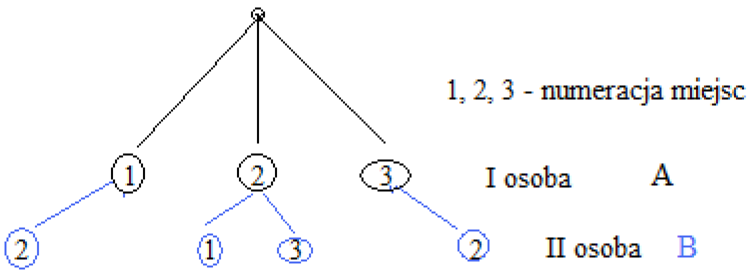


(1, 2), (1, _, 3). (2, 1), (3, 3), (3, 1), (3, 2) - miejsca zajmowane przez osoby A i B

(A, B , _), (A, _, B), (B, A, _), (B, _, A), (_, B, A) - usytuowanie osób na miejscach 1, 2, 3

_ - miejsce wolne

b) Na ile sposobów 2 osoby usiąść obok siebie na ławce mieszczącej 3 osoby



Zajęte sąsiednie miejsca przez osobę A i B:

(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)

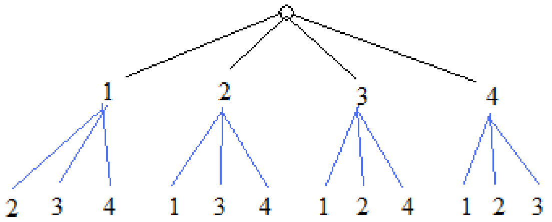
Osoby na kolejnych miejscach o numerach 1, 2, 3; _ puste miejsce

(A, B, _), (B, A, _), (_, A, B), (_, B, A)

|A| = 1 + 2 + 1 = 4

c) Na ile sposobów 2 osoby mogą siedzieć na ławce mieszczącej 4 osoby?

2 osoby, 4 miejsca na ławce.
Osoby nie muszą siedzieć koło siebie



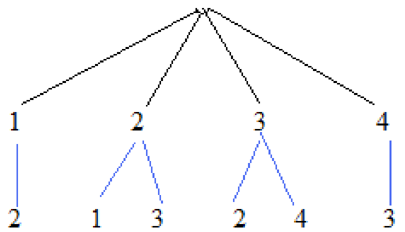
Wybór miejsca przez I osobę

Wybór miejsca przez II osobę

|A| = 4*3 =12 sposobów

d) Na ile sposobów mogą siedzieć 2 osoby obok siebie, na ławce mieszczącej 4 osoby?

2 osoby: A i B, ławka ma 4 miejsca: 1, 2, 3, 4



Wybór miejsca o numerze 1...4
przez osobę A

wybór sąsiedniego miejsca
przez osobę B

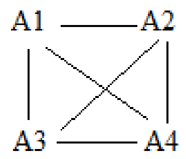
Wybrane miejsca przez osobę A oraz B:
(1, 2),, (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)

Usytuowanie osób na kolejnych miejscach; _ miejsce puste:
(A, B, _, _), (B, A, _, _), (_, A, B, _), (_, B, A, _), (_, _, A, B), (_, _, B, A)

|A| = 1 + 2 + 2 + 1 = 6

Przykład
Spotkało się 4 przyjaciół. Każdy witał się z każdym. Ile było powitań?

Cztery osoby, każda sita się z każdą



A1, A2 i A2, A2 to ta sama para

I sposób

A = {(A1, A2), (A1, A3), (A1, A4), (A2, A3), (A2, A4), (A3, A4)}

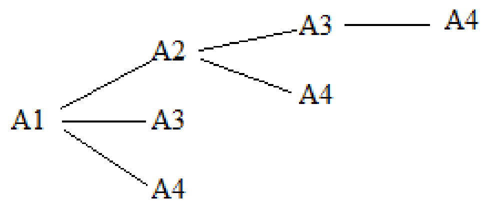
|A| = 6

II sposób

Każda z 4 osób ma 3 powitania

(4 *3) / 2 = 12/2 = 6

III sposób



3 + 2 + 1 = 6

Ogólnie: n osób: Ilość powitań: n*(n-1) / 2

Przykład

Pięciu przyjaciół wysłało SMS 'a, każdy każdemu. Ile wysłano SMS -ów?

Każdy z 5 do pozostałych czterech.

5*4 = 120

Ogólnie: n – osób: n*(n-1) możliwości wysłania SMS -ów każdy do kazdego

Przykład

Oblicz ile jest

a) Ile jest wszystkich liczb naturalnych 4-cyfrowych?

TSDJ - tysiące, setki, dziesiątki, jedności

Na 1 miejscu (tysiące) może być 9 cyfr (bez zera), na następnych 10 – cyfry mogą się powtarzać

N = 9*10*10*10 = 9000

lub

N = 10*10*10*10 – 10*10*10 = 10000 – 1000 = 9000

b) Ile jest liczb naturalnych 3-cyfrowych o różnych cyfrach?

SDJ - setki: 9 możliwości, dziesiątki – 10-1 = 9 możliwości, jedności: 9 -1 = 8 możliwości (o 1 mniej)

N = 9*9*8 = 648

c) Ile jest liczb naturalnych 3-cyfrowych parzystych

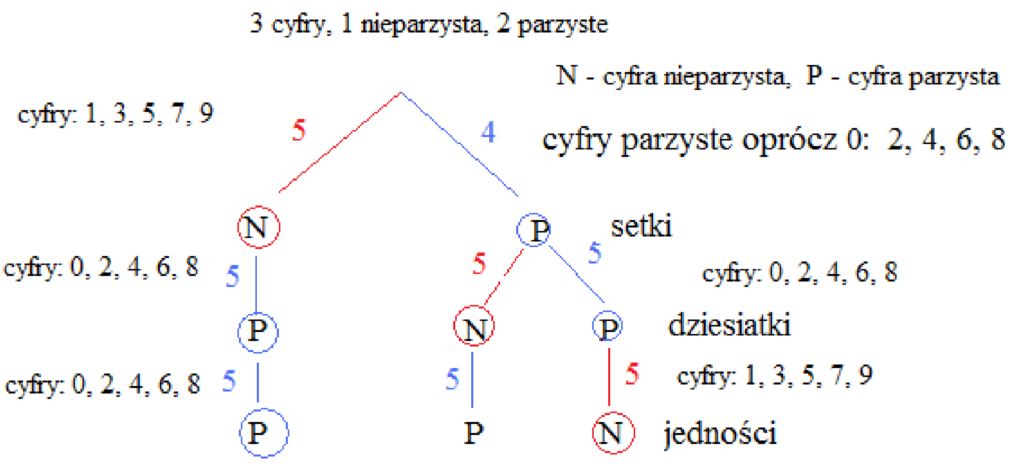
SDJ – setki: 9, D – 10, J – 5 (cyfry parzyste, czyli: 0, 2, 4, 6, 8)

9*10*5 = 450

lub

(10*10*10 – 10*10) / 2 = (1000-100) / 2= 900/2 = 450 - co druga liczba jest parzysta

d) Ile jest liczb 3-cyfrowych, takich, ze w zapisie 10-nym występuje jedna cyfra nieparzysta i 2 cyfry parzyste?



5*5*5 + 4*5*5 + 4*5*5 = 125 + 4*(5*5 +5*5)) = 125+ 200 = 325

$\boxed{\text{325 mozliwości}}$

<u>Przykład</u>

Ile jest liczb:

a) Ile jest wszystkich liczb naturalnych 5-cyfrowych?

N = 9*10*10*10*10 = 9*10^4 = 90000

b) Naturalnych 4-cyfrowych, których cyfry są różne?

N = 9*(10-1)*(9-2)*(9-3) = 9*9*8*7 = 4536

c) Liczb naturalnych 4-cyfrowych nieparzystych?

N = 9*10*10*5 = 4500 (cyfry mogą się powtarzać)

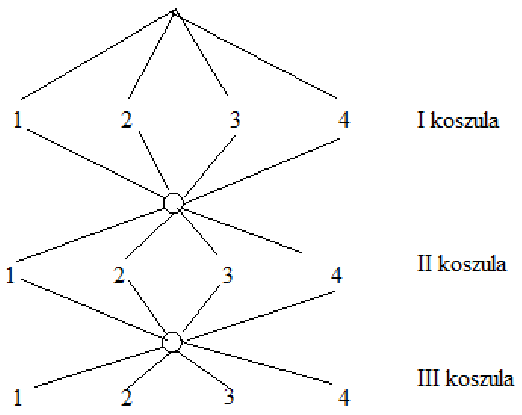
d) Liczb naturalnych 3-cyfrowych, w których zapisie występują tylko liczby nieparzyste lub tylko liczby parzyste

N = 5*5*5 + 4*5*5 = 125 + 100 = 125 (125 nieparzystych i 100 parzystych)

<u>Przykład</u>

a) Na ile sposobów można rozmieścić 3 koszule w 4 szufladach?

Każdą z 4 koszul można włożyć do jednej z 4 szuflad – każda ma 4 możliwości rozmieszczenia. Możliwości rozmieszczenia jest 4*4*4 = 64



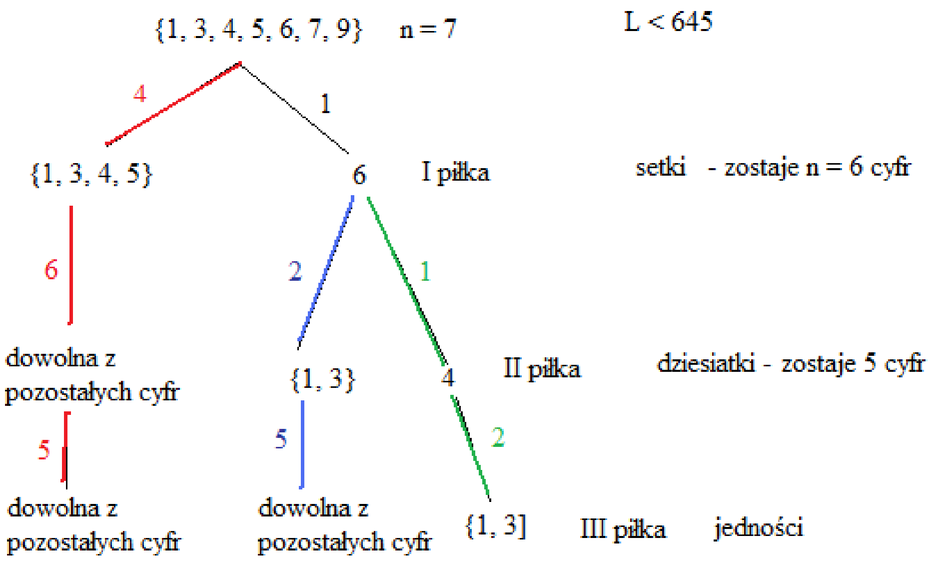
n = 4*4*4 = 4^3 = 64

b) Na ile sposobów można rozmieścić 4 koszule w 3 szufladach?
Każdą z 4 koszul można włożyć do jednej z 3 szuflad – (każda ma 3 możliwości rozmieszczenia)
$N = 3*3*3*3 = 3^4 = 81$

Przykład
Na ile sposobów można rozmieścić
a) 6 czapek w 4 szufladach?
$4*4*4*4*4*4 = 4^6 = 4096$ *każda czapka ma 4 możliwości, a jest 6 czapek*
b) 4 czapki w 6 szufladach?
$6*6*6*6 = 6^4 = 1296$ *każda czapka ma 6 możliwości, a są 4 czapki*

Przykład
W pudełku jest 7 piłeczek ponumerowanych: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Wybieramy kolejno 3 razy po jednej piłeczce i z cyfr tworzymy liczbę trzycyfrową. Pierwsza z wybranych jest cyfrą setek, druga cyfrą dziesiątek, trzecia cyfrą jedności.
a) Ile liczb mniejszych od 645?

W pudełku jest 7 piłeczek oznaczonych cyframi: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9.
Wybieramy 3 razy po jednej piłeczce i tworzymy liczbe 3-cyfrową. I cyfra - seteki, II - dziesiątki, III - jedności.
Ile można utworzyć liczb mniejszych od 645?



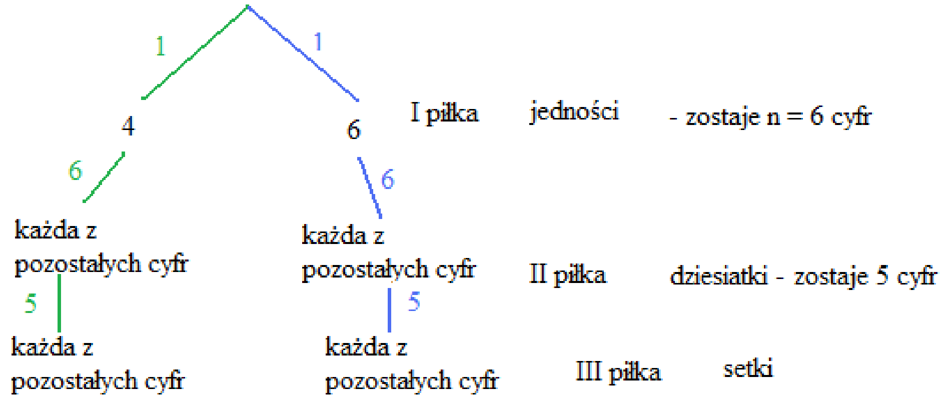
Liczb mniejszych od 645 można otrzymac:

$4*6*5 + 1 * (2*5 + 1*2) = 132$

b) Ile liczb parzystych?

W pudełku jest 7 piłeczek oznaczonych cyframi: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9.
Wybieramy 3 razy po jednej piłeczce i tworzymy liczbe 3-cyfrową. I cyfra - seteki, II - dziesiątki, III - jedności.
Ile można utworzyć liczb parzystych?

{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9} n = 7 L < 645



Wszystkich liczb parzystych można otrzymać:

n = 1*6*5 + 1 *6*5 = 2*6*5 = 60

c) Ile jest liczb podzielnych przez 3

Warunek podzielności przez 3 spełniają trójki cyfr:
1, 3, 5   1, 4, 7   1, 5, 6   1, 5, 9
3, 4, 5   3, 5, 7   3, 6, 9
4, 5, 6   4, 5, 9
5, 6, 7
Takich trójek jest 10.
Z każdej trójki można utworzyć: 3*2*1 = 6 różnych cyfr
Liczb podzielnych przez 3 jest więc: 10*6 = **60**

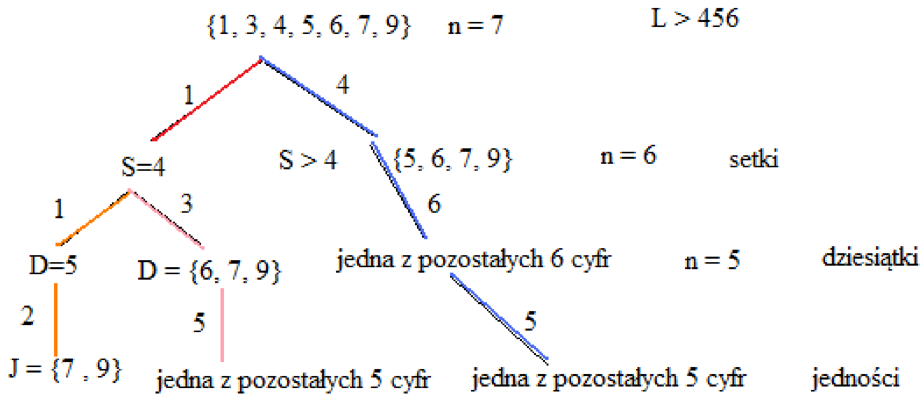
d) Ile jest wszystkich liczb 3-cyfrowych?

|{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9} | = 7
S D J |S| = 7, |D| = 6, |J| = 5
|A| = 7*6*5 = 210

e) Ile jest liczb większych od 456?

1) S=4, D = 5, J = {7, 9} → 1*1*2 = 2 możliwości: 457, 459
2) S = 4, |D| = |{6, 7, 9}| = 3, |J| = 5 → 1*3*5 = 15 możliwości
3) S > 4: |S| = |{5, 6, 7, 9}| = 4, |D| =6, |J| = 5 → 4*6*5 = 120
|A| = 1*1*2 1*3*5 + 4*6*5 = 1*(1*2 + 3*5) + 4*6*5 = 137

W pudełku jest 7 piłeczek oznaczonych cyframi: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9.
Wybieramy 3 razy po jednej piłeczce i tworzymy liczbe 3-cyfrową. I cyfra - seteki, II - dziesiątki, III - jedności.
Ile można utworzyć liczb : > 456



Wszystkich liczb > 456 można otrzymać:

1*1*2 + 1*3*5 +4*6*5 = 2 + 15 + 120 = 137

f) Ile jest liczb podzielnych przez 9

Suma cyfr dzieli się przez 9

1, 3, 5   4, 5, 9   5, 6, 7   1, 9, 8

Takich trójek jest 4.

Z każdej trójki można utworzyć: 3*2*1 = 6 różnych cyfr

Liczb podzielnych przez 9 jest więc: 4*6 = **24**

Przykład

Na ile sposobów można z grupy liczącej 10 osób (n=10) wybrać delegację składającą się z:

a) 2 osób (k=2)

Liczba wszystkich możliwości wyboru 2-osobowej delegacji:
wybór I osoby: 10 możliwości (ile liczy grupa) Ogólnie: n możliwości (ile liczy grupa)
wybór II osoby: (10-1) = 9 możliwości Ogólnie: n-1 możliwości
Liczba kolejności w jakiej 2 osoby zostały wybrane
wybór za I razem: 2 możliwości Ogólnie: k możliwości (ile liczy delegacja0
wybór za II razem: 1 możliwość Ogólnie: k-1 możliwości
m = 10*9 / (2*1) = 90/2 = 45

b) 3 osób

m = 10*9*8 / (3*2*1) = 120

Przykład

Na ile sposobów można z grupy liczącej 20 osób (n=20) wybrać delegację składającą się z:

a) 2 osób (k=2)

m = n*(n-1)*…(n-k) / (k*(k-1)*(k-2)..*1

m = 20*19 / (2*1) = 190

b) 3 osób

m = 20*19*18 / (3*2*1) = 6840/6 = 1140

c) 4 osób

m = 20*19*18*17 / (4*3*2*1) = 4845

Zdarzenie losowe i jego prawdopodobieństwo

Podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych **Ω** nazywamy **zdarzeniem losowym** lub krótko **zdarzeniem**.
Zdarzenia losowe oznaczamy wielkimi literami alfabetu: **A, B, C**, …
Jeżeli A jest zdarzeniem losowym, to zdarzenie elementarne **ω**, takie że **ω** $\in A$,
nazywamy zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A.

Zdarzeniem pewnym nazywamy zdarzenie losowe, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne tworzące zbiór **Ω**.
Zdarzenie pewne zachodzi, gdy spełnia je każde zdarzenie z przestrzeni zdarzeń **Ω ,**
więc liczba zdarzeń elementarnych |A| zdarzenia losowego A równa jest liczbie **|Ω|** wszystkich zdarzeń. Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego wynosi 1.
Przykład: uzyskanie jakiejkolwiek liczby oczek podczas rzutu kostką.

Zdarzeniem niemożliwym nazywamy zdarzenie losowe, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne ze zbioru **Ω.**
Zdarzenie niemożliwe zachodzi, gdy nie ma żadnego zdarzenia elementarnego, które je spełnia.
Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego wynosi 1.
Przykład: Zdarzenie polegające na wyrzuceniu 8 oczek, podczas rzutu kostką sześcienną.

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia **A** nazywamy zdarzenie **A’**, któremu sprzyjają te zdarzenia przestrzeni **Ω**, które nie sprzyjają zdarzeniu A.
Zdarzenia przeciwne A i A’ to zdarzenia, które się wzajemnie uzupełniają, tworząc całą przestrzeń zdarzeń elementarnych **Ω**, ale nie mają elementów wspólnych.
Przykład: Jeżeli przy rzucaniu kostką sześcienną, zdarzenie A polega na wyrzuceniu 1 lub 6 to zdarzenie przeciwne A’ polega na wyrzuceniu liczb pozostałych, czyli: 2, 3, 4, 5.

Pojęcie prawdopodobieństwa

Każdemu zdarzeniu losowemu **A** można przyporządkować pewną liczbę **P(A)**, określająca szansę zajścia tego zdarzenia w doświadczeniu losowym
P(A) – prawdopodobieństwo zdarzenia **A.**
0 <= P(A) <= 1
Prawdopodobieństwo jest liczbą z przedziału **<0; 1>** i można je podać w procentach.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa opisuje model doświadczenia losowego,
w którym zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych jest zbiorem skończonym i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Jeśli:
Ω – jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych,
I zdarzenie **A** zawiera się w Ω,
to prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywamy liczbę **P(A),** taką, że:
P(A) = |A| / |Ω|

gdzie **|A|** - liczba zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia **A** (liczba elementów zbioru A),
a **|Ω|** - liczba wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych (liczba elementów zbioru Ω)

Jeśli stwierdzimy, że doświadczenie losowe jest klasycznym modelem probabilistycznym, to:
1) obliczamy, ile jest wszystkich zdarzeń możliwych przestrzeni **Ω**
2) określamy, które spośród zdarzeń elementarnych sprzyjają zdarzeniu **A**, którego prawdopodobieństwo chcemy obliczyć
3) obliczamy, ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A
4) obliczamy **P(A) = |A|/ |Ω|**

Własności prawdopodobieństwa

Jeśli:
Ω – jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych,
A – zdarzenie, które zawiera się w zbiorze Ω,
P(A) – prawdopodobieństwo zdarzenia A to:

P(A) = 1, *gdy A jest zdarzeniem pewnym*
P(A) = 0, *gdy A jest zdarzeniem niemożliwym*
0 < P < 1, *gdy A ≠ Ω i A ≠ Ø*
P(A) = 1 – P(A'), *gdy A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A*

Jeśli:
Ω – jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych,
A, B – zdarzenia, które zawierają się w zbiorze Ω,
P(A) – prawdopodobieństwo zdarzenia A to:
P(B) – prawdopodobieństwo zdarzenia B to:

P(A) ≤ P(B), *jeśli A ⊂ B*
P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)
P(A ∪ B) = P(A) + P(B), *gdy A ∩ B) = Ø*
P(A\B) = P(A) – P(A ∩ B), *gdy A ∩ B ≠ Ø*
P(A\B) = P(A), *gdy A ∩ B = Ø*

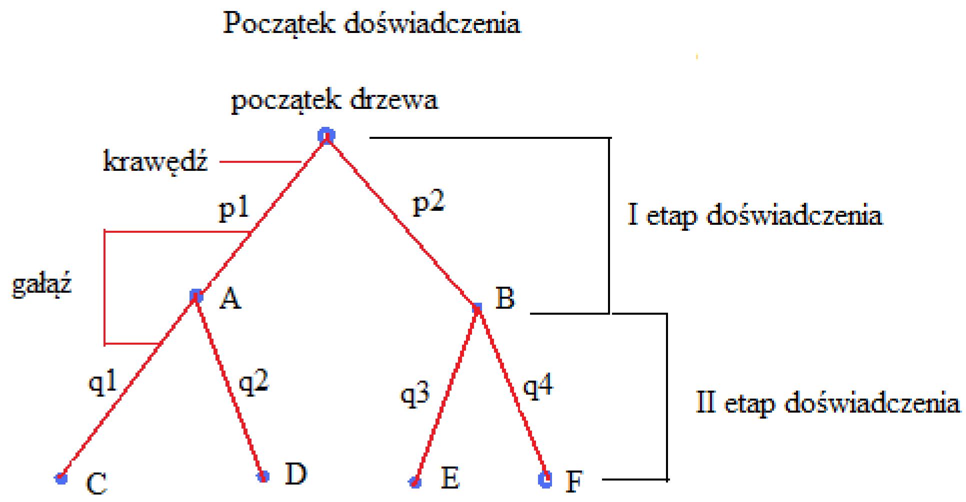
Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą metody drzew

W przypadku drzew zdarzeń *oblicza się prawdopodobieństwa* mniejszych zdarzeń, składających się na przestrzeń zdarzeń elementarnych a następnie wykonuje się działania na tych prawdopodobieństwach.
Podstawowym warunkiem jest wystąpienie co najmniej 2 zdarzeń - losowań , wyborów (np. 3 kule z 7, wyrzucenie orła lub reszki, wyrzucenie ilości oczek w rzucie kostką).
Losowań / zdarzeń nie powinno być dużo – najlepiej nie więcej niż 3.
„Mniejsze zdarzenie" to jedno losowanie czy jeden wybór
Drzewo – graficzne przedstawienie przebiegu i wyników wieloetapowego doświadczenia.
Drzewo składa się z wierzchołków, krawędzi i gałęzi.
Wierzchołkom drzewa przyporządkowuje się wyniki poszczególnych etapów doświadczenia, a krawędziom – prawdopodobieństwa uzyskania wyników
Z górnego wierzchołka odchodzą krawędzie odpowiadające zdarzeniom elementarnym I etapu doświadczenia.

Z końców tych krawędzi wychodzą następne krawędzie odpowiadające wynikom drugiego etapu doświadczenia itd.
Suma prawdopodobieństw przypisanych krawędziom wychodzącym z jednego wierzchołka jest równa **1**.
Gałęzią nazywamy ciąg krawędzi prowadzących od początku drzewa do jednego z ostatnich jego wierzchołków.
Jedna gałąź drzewa odpowiada jednemu zdarzeniu elementarnemu doświadczenia wieloetapowego.

Reguła iloczynów
Prawdopodobieństwo zdarzenia reprezentowanego przez jedną gałąź drzewa jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się ta gałąź.

Reguła sum
Prawdopodobieństwo danego zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi drzewa jest równe sumie prawdopodobieństw przyporządkowanych tym gałęziom, otrzymanych zgodnie z regułą iloczynów dla tych gałęzi.

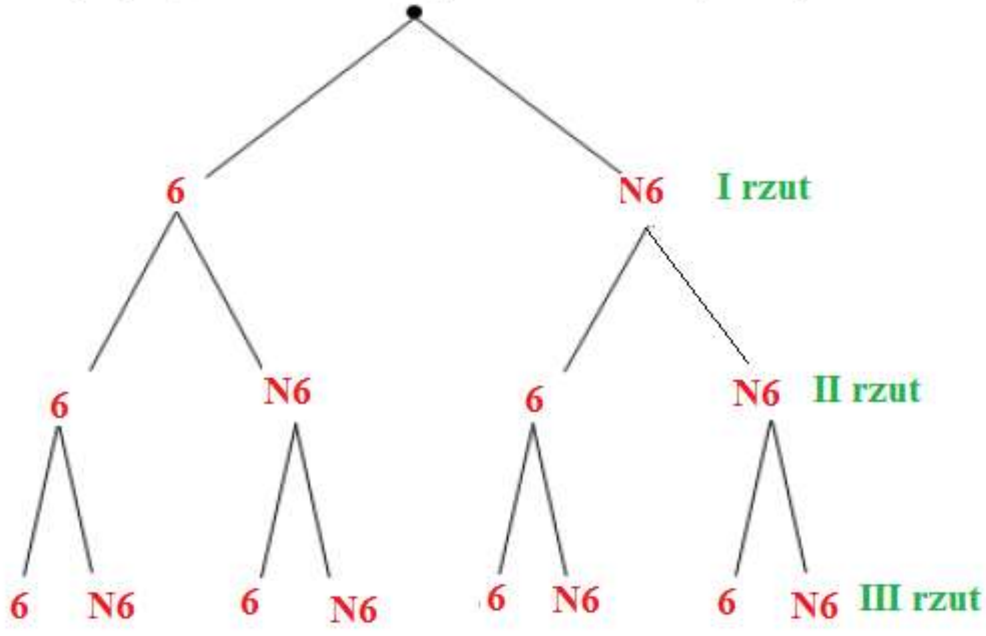


$p1 + p2 = 1$ $\quad$ $q1 + q2 = 1$ $\quad$ $q3 + q4 = 1$

Przykład:
*Rzucamy **3** razy **czworościenną** kostką do gry, na której są cyfry: **3, 4, 5, 6.***
*Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie **dwóch szóstek?***
Oznaczenia: 6 – wyrzucono cyfrę 6, N6 – wyrzucono inną cyfrę – Nie 6

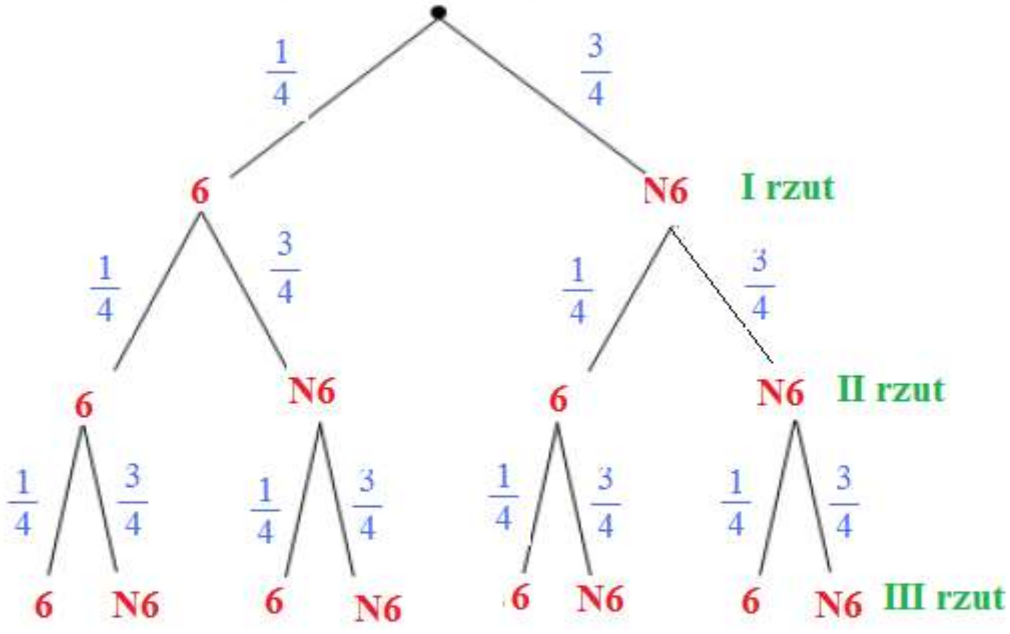
KROK I.

Rysujemy drzewo dla wszystkich losowań (rzutów)



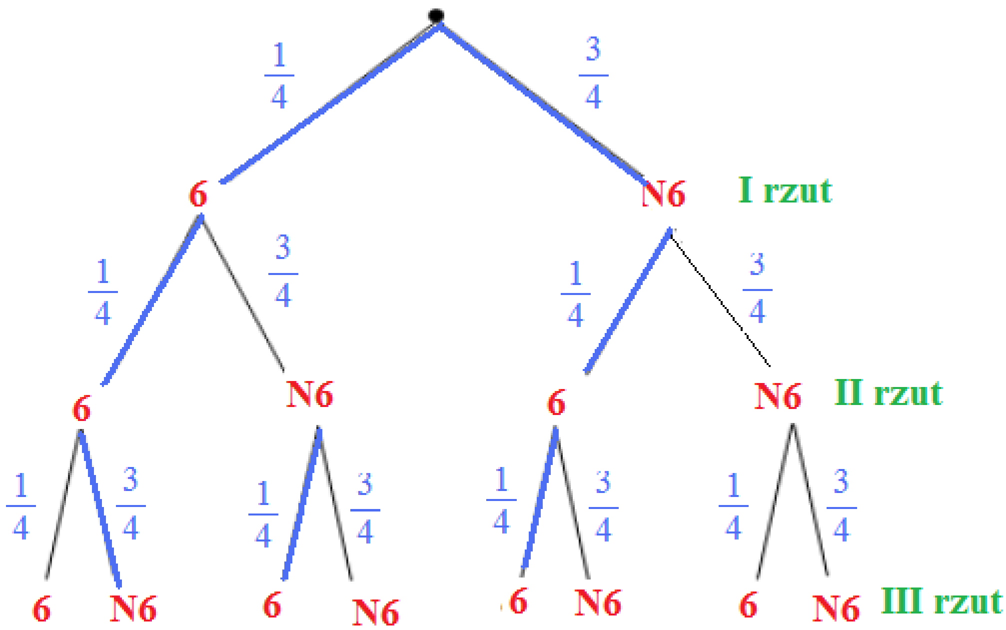
KROK II

Zapisujemy prawdopodobieństwa mniejszych zdarzeń na poszczególnych gałęziach drzewa



KROK III

Ustalamy, które drogi spełniają sprzyjające zdarzenia losowe.
Droga wiedzie od punktu startu do wyniku ostatniego losowania.



KROK IV

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia losowego zgodnie z zasadą:

P(A) =

iloczyn prawdopodobieństw jednej „drogi"

+ iloczyn prawdopodobieństw drugiej

+ iloczyn prawdopodobieństw trzeciej …

$$P(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$$

$$P(A)=\frac{3}{64}+\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{9}{64}$$

Elementy kombinatoryki

W kombinatoryce rozważa się zależności miedzy elementami **zbiorów** i wyrazami **ciągów**.
Zbiór składa się z elementów nieuporządkowanych – *np. jabłka w koszyku.*

Ciąg zawiera wyrazy uporządkowane – np. każde kolejne jabłko w ponumerowanym od **1** do **n** pudełku, każdy uczeń ma numer w dzienniku, w zawodnik sportowy jest oznaczony numerem itp.

Ustawianie wszystkich elementów zbioru w pewnej kolejności

Tworzenie **n** -wyrazowych ciągów ze wszystkich elementów zbioru n -elementowego
Kolejność wybierania elementów jest istotna!
Liczba wszystkich możliwych ustawień: **n*(n-1)*(n-1)*…*2*1** = **n!**

Przykład:
Na ile sposobów można rozdzielić 3 czekolady c1, c2, c3 pomiędzy 3 osoby?
I osoba ma 3 możliwości otrzymania czekolady: c1, c2, c3. Załóżmy, że dostała c1.
II osoba ma już tylko 2 możliwości, w tym przypadku : c2 i c3. Załóżmy, że dostała c2.
III osoba – pozostała tylko jedna czekolada – jedna możliwość.
Wszystkich możliwości jest 3*2*1 = 3! = 6

Wybieranie k elementów ze zbioru n –elementowego

1. Wybrane elementy nie mogą się powtarzać i kolejność wybranych elementów jest istotna (k<=n)
Tworzenie **k** – wyrazowych ciągów utworzonych z różnych elementów **n** – elementowego zbioru dla **k <= n**
Liczba wszystkich możliwości wyboru: **n*(n-1)*…[n – (k-1)]**

Przykład:
*Z cyfr **1, 2, 3, 4, 5** wybieramy dwie cyfry i tworzymy z nich liczbę 2-cyfrową.*
Ile można utworzyć takich liczb?
Cyfrę jedności można wybrać spośród 5 cyfr na 5 sposobów. Załóżmy, że wybrano 1.
Cyfrę dziesiątek można wybrać z 4 pozostałych cyfr: 2, 3, 4, 5 – cztery sposoby.
Wszystkich możliwości jest: 5*4 = 20

2. Wybrane elementy mogą się powtarzać i kolejność wybranych elementów jest istotna
Tworzenie **k** – wyrazowych ciągów utworzonych z elementów **n** – elementowego zbioru *(k <= n)*
Liczba wszystkich możliwości wyboru: **n*n*n…*n *(k razy)* =** n^k

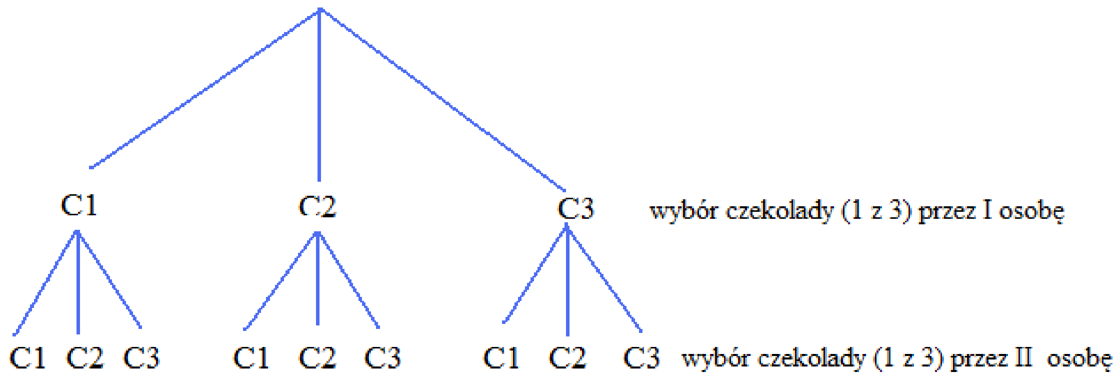
Przykład:
Ile różnych liczb 4-cyfrowych można utworzyć z cyfr 6, 7, 8?
Cyfrę jedności można wybrać z cyfr 6, 7, 8 na 3 sposoby – są 3 możliwości,
Cyfrę dziesiątek można wybrać spośród cyfr 6, 7, 8, są więc też 3 możliwości (cyfry mogą się powtarzać)
Cyfrę setek można wybrać spośród cyfr 6, 7, 8, są więc też 3 możliwości
Cyfrę tysięcy można wybrać spośród cyfr 6, 7, 8, są więc też 3 możliwości
Wszystkich możliwości jest 3*3*3*3 = 3^4 = 81

Przykład:
W sklepie są 3 rodzaje czekolad.
a) Na ile sposobów mogą wybrać te czekolady 2 osoby?
b) Ile jest możliwości wyboru przez te osoby (każda niezależnie) tej samej czekolady?
c) Na ile sposobów, k osób (obiektów) może dokonać wyboru spośród n czekolad (możliwości)?

$Wn^k = n^k$ - <u>wariacje z powtórzeniami</u>

a) n = 3 (czekolady) k = 2 (osoby) $n^k = 3^2 = 9$

Na ile różnych sposobów można wybrać 3 czekolady przez 2 osoby



Możliwości wyboru:

Ω = { (C1 C1) , (C1 C2), (C1 C3), (C2 C1), (C2 C2), (C2 C3), (C3 C1), (C3 C2) (C3 C3) }

$|\Omega| = 3^2 = 9$

$\boxed{Wn^k = n^k}$ n - ilość czekolad (mozliwości), k - ilość osób (obiektów)

b) n = 3 (czekolada) k = 1 (osoba) $n^k = 3^1 = 3$

c) n - ilość czekolad (możliwości), k – ilość osób (obiektów) **$Wn^k = n^k$**

3. Wybrane elementy nie mogą się powtarzać i kolejność wybranych elementów nie jest istotna
(k<= n)
Tworzenie **k** – elementowych podzbiorów zbioru **n** – elementowego (k <= n)
<u>Liczba wszystkich możliwości wyboru:</u>
{ n*(n-1)*…[n – (k-1)] } / [k*(k-1)*…*2*1] = = { n*(n-1)*…[n – (k-1)] } / k!

<u>Przykład:</u>
*Na ile sposobów można wybrać spośród **6 osób** <u>delegację **3**-osobową</u>?*
Pierwszą osobę można wybrać spośród 6 osób – 6 możliwości.
Drugą osobę można wybrać spośród 5 pozostałych osób – 5 możliwości
Trzecią osobę można wybrać spośród 4 pozostałych osób – 4 możliwości
Osoby można wybrać na: 6*5*4 = 120 sposobów.
Ponieważ kolejność wybieranych osób nie jest istotna, wszystkich możliwości jest:
120/3! = 120/6 = 20

Kombinatoryka

Silnia

Pojęcie silni:
0! = 1 1! = 1 n! = 1*2*…*(n-1)*n dla n > 1
Dla liczby naturalnej n > 1 symbol **n!** (czyt. n silnia)
oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n
n! = 1*2*3*…*n

n! = 1, gdy n $\in \{0, 1\}$
n! = (n-1)!*n, gdy n $\in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

Wzór rekurencyjny: **0! = 1, (n+1)! = (n+1)*n!**

Symbol Newtona

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$ = $\frac{n*(n-1)*(n-2)*...(n-k+1)}{1*2*3*...*k}$ gdy n ∈ N, k ∈ N i n >= k

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$ **= 1**

$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}$ **= n**

Permutacja bez powtórzeń
n –elementowego zbioru – każdy **n** –wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Z permutacjami mamy do czynienia, gdy określamy liczbę wszystkich ciągów,
jakie możemy utworzyć ze wszystkich elementów danego zbioru, którego liczbę oznaczamy przez **n**.

Liczba wszytkich permutacji zbioru n -elementowego wyraża się wzorem:
$\mathbf{P_n = n!}$ gdzie n ∈ N
n! - czytamy n silnia

Permutacja to ustawienie wszystkich elementów zbioru w pewnej kolejności.
Dwie permutacje tego samego zbioru mogą się różnić między sobą co najwyżej kolejnością elementów.

Na przykład zbiór {a, b} ma **2** permutacje: {a, b} i {b, a}
Zbiór A= {a, b, c} ma **6** permutacji: (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b), (a, c, b), (b, a, c), (c, b, a)

Liczba $\mathbf{P_n}$ permutacji rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem **n**.
$P_2 = 2$, $P_3 = 6$, $P_4 = 24$, $P_5 = 120$, $\mathbf{P_6} = \mathbf{720}$ itd.

Przykład:
Mamy 8 książek o różnokolorowych okładkach na półce. Ile jest możliwości ustawienia tych książek?
Liczba elementów zbioru, z którego tworzymy ciąg: n = 8
n! = 8! = 1*2*3*4*5*6*7*8 = 40320

Przykład:
*Na ile sposobów można ustawić na półce **3** różne książki?*
Oznaczmy książki numerami: 1, 2, 3 i wypiszmy wszystkie możliwe ustawienia:
1 2 3   1 3 2   2 1 3   2 3 1   3 1 2   3 2 1.
Trzy książki można utworzyć na 3! sposobów: $P_3 = 3! = 1*2*3 = 6$

Przykład:

*Na ile sposobów można ustawić **8** zawodników na 8 pasach startowych bieżni?*

P_8 = 8! = 1*2*3*4*5*6*7*8 = 6!*7*8 = **720***56 = 40320

Permutacje z powtórzeniami – elementy w zbiorze powtarzają się n1, n2, … nk razy
(n1 + n2 + … + nk = n)

$P_{n'} = \frac{n!}{n1!*n2!*..nk!}$

Kombinacja bez powtórzeń k elementów spośród n elementów (0 <=k <=n)

- każdy k –elementowy podzbiór zbioru n – elementowego.

Liczba kombinacji bez powtórzeń:

$C_n^k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$ gdy $n \in N^+$, $k \in N^+$ i n >= k

Cn^k = nCk = n! / (k!*(n-k)!)

Jeżeli w doświadczeniu ze zbioru **n** –elementowego wybieramy **k** –elementów w ten sposób, że
- wybrane elementy nie mogą się powtarzać
- kolejność wybranych elementów nie jest istotna

To tworzymy **k** –elementową kombinację zbioru **n** -elementowego, gdzie k <=n

Uwaga: W kalkulatorze oznaczenie: **nCr = n! / (r!*(n-r)!)**

Przykład

A = {a, b, c} n = 3

Dla k = 2

C_3^2 = 3!/(2!*(3-2)! = 3!/(2!*1!) = 1*2*3/2 = 3

Możliwe podzbiory: {ab, ac, bc}

Wariacja k –wyrazowa bez powtórzeń zbioru n – elementowego – każdy k –wyrazowy ciąg o różnych wyrazach ze zbioru n –elementowego.

Z wariacją bez powtórzeń mamy do czynienia, gdy tworzymy ciąg z elementów danego zbioru i ciąg ten nie musi się składać ze wszystkich elementów zbioru.

Np. w zbiorze jest 20 elementów a ciąg jest 5 elementowy.

„Bez powtórzeń” oznacza, że żaden element tworzonego ciągu nie może się powtarzać.

Np. w przypadku losowania kolejnych elementów ciągu, element wylosowany nie wraca so puli – losowanie bez zwracania.

Liczbę elementów zbioru oznaczamy przez **n**, a liczbę elementów powstałego ciągu przez **k**.

Ilość wariacji bez powtórzeń, tworzonej ze zbioru **n** –elementowego, a ciąg tworzony ma **k** elementów - oznaczamy przez **V_n^k**

Liczba wariacji bez powtórzeń:

V_n^k = **n*(n-1)*(n-2)*…*(n-k+1)** = **n! / (n-k)!** gdzie $n \in N^+$, $k \in N^+$ i k <=n

Jeżeli w doświadczeniu losowym ze zbioru n -elementowego wybieramy k elementów w ten sposób, że:
- wybrane elementy nie mogą się powtarzać
- kolejność wybranych elementów jest istotna

To tworzymy **k** -wyrazową wariację bez powtórzeń zbioru **n** – elementowego, gdzie *k <=n*

Uwaga: W kalkulatorze oznaczenie: **nPr = n! / (n-r)!**

Każda n –elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru n –elementowego jest jego permutacją

Przykład

Ze zbioru {a, b, c} można utworzyć sześć 2-wyrazowych wariacji bez powtórzeń

(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b)

n=3, k = 2

$V_3^{\,2} = 3*2*1 = 6$

$V_3^{\,2} = 3!/(3-2)! = 1*2*3 = 6$

Przykład:

Pewien kod tworzymy z 3 liter wybranych spośród następujących: A, B, C, D, E, F, G, H, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?

Na I miejscu można wpisać jedną z 8 liter, na II miejscu jedną z pozostałych 7 liter, na trzecim jedną z pozostałych sześciu.

$V_8^3 = 8*7*6 = 8!/ (8-3)! = 8!/5! = 5!*6*7*8/5! = 6*7*8 = 336$

Przykład:

A = {a, b, c} – zbiór wyjściowy – n = 3

Dla k = 2

$V_3^2 = 3!/(3-2)! = 3!/1! = 3! = 1*2*3 = 6$ {ab, ba, ac, ca, bc, cb}

Przykład

Spośród 25 zawodników zostanie wybranych 3 medalistów. Jaka jest liczba możliwych wyników?

$V_{25}^3 = 25*24*..(25-3+1) = 25*24*(25-3+1) = 25*24*23 = 13800$

$V_{25}^3 = 25!/(25-3)! = 22!*23*24*25/22! = 23*24*25= 13800$

Przykład:

Pewien kod jest czterocyfrowy i składa się z cyfr 1 do 9, przy czym żadna cyfra nie może się powtarzać.
Liczba elementów zbioru, z którego losujemy elementy wynosi 9 (cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – bez 0)
Liczba elementów ciągu wynosi 4 – kod zawiera 4 cyfry: k = 4

$|\Omega| = V_9^4 = 9! / (9-4)! = 9!/5! = 5!*6*7*8*9 / 5! = 6*7*8*9 = 3024$

*Na kalkulatorze naukowym: **9 SHIFT nPr 4** = 3024*

Wariacja k – wyrazowa z powtórzeniami zbioru **n** – elementowego – każdy **k** – wyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru n – elementowego.
Wariacje z powtórzeniami stosujemy w takich przypadkach jak wariacje bez powtórzeń ale z tą różnicą, że poszczególne elementy ciągu mogą się powtarzać.

Liczba wszystkich możliwych wariacji z powtórzeniami:

$\mathbf{W_n^k = n^k}$ gdzie $n \in N^+$, $k \in N^+$

Przykład:

Z elementów zbioru {a, b} można utworzyć:
Cztery 2-wyrazowe wariacje z powtórzeniami:

(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)

$W_2^2 = 2^2 = 4$

Osiem 3-wyrazowych wariacji z powtórzeniami:
(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a), (b, b, b), (b, b, a), (b, a, b), (a, b, b)
n =2, k = 3
$W_2^3 = 2^3 = 8$

Przykład:
A = {a, b, c}, n-3, k=2
$W_3^2 = 3^2 = 9$ Możliwe podzbiory: {ab, ba, ac, ca, bc, cb, aa, bb, cc}

Przykład:
Ile jest wszystkich liczb 3-cyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1 i 2?
Na każdej pozycji mogą być 2 cyfry. |1..2 | 1..2 | 1..2|
Każdą z 3 cyfr można wybrać na 2 sposoby,
zatem jest: 2*2*2 = 8 takich liczb (2 cyfry na każdej z 3 pozycji)
{111, 121, 211, 221, 112, 122, 212, 222}
n=2, k=3
$W_2^3 = 2^3 = 8$

Przykład
Ile jest wszystkich liczb 3-cyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 2, 3, 4, 5?
Na każdej pozycji mogą występować cyfry 1, 2, 3, 4, 5 – pięć cyfr.
n =5, k = 3 [1..5][1..5][1..5]
Jest 5*5*5 = 125 takich liczb
$W_5^3 = 5^3 = 125$

Przykład
Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z liter: A, B, C, D, E, F, G, H, jeśli litery mogą się powtarzać.
n=8, k = 5; Jest kodów: 8*8*8*8*8 (8 na każdej pozycji)
$W_8^5 = 8^5 = 32768$

Podstawowe zasady kombinatoryki

Zasada mnożenia

Jeśli I obiekt daje **n** możliwości a drugi **m** możliwości, to przy rozpatrywaniu niezależnym tych obiektów, mamy: **n * m** możliwości

Przykład: Ile można utworzyć kodów 2-znakowych, w których
- na miejscu I umieszczamy jedną z 20 liter
- na miejscu II jedną z cyfr 1 do 9
Dane: n = 20, m = 9
n * m = 20*9 = 180 Odp. można utworzyć 180 kodów 2-znakowych, przy zadanych warunkach

Jeśli obiektów jest **k**,
pierwszy stwarza $\mathbf{n_1}$ możliwości, drugi $\mathbf{n_2}$, … ostatni $\mathbf{n_k}$ możliwości
I obiekty te możemy rozpatrywać niezależnie, to jest ogółem:
$\mathbf{n_1 * n_2 * … * n_k}$ możliwości

Przykład:

Trzy klasy liczą odpowiednio: 20, 30, 25 uczniów.

Ile 3-osobowych delegacji szkoły można utworzyć, biorąc po jednym uczniu z każdej klasy?

k= 3, n1 = 20, n2 = 30, n3 = 25

20*30*25 = 15000 Odp. Można utworzyć 15000 delegacji trzyosobowych.

Jeśli obiektów jest **k** i każdy z nich ma tyle samo **n** możliwości,
to ogółem możliwości jest n^k

Wariacje z powtórzeniami: $W_n^k = n^k$

Przykład:

Sześciu uczniów ma oceny w skali 2 do 5 (1, 3, 4, 5 – 4 oceny). Ile jest możliwości wystawienia ocen?

n = 4 (oceny), k = 6 (uczniowie)

$4^6 = 4096$

Pięcioro uczniów ma oceny w skali 1 do 6. Ile jest możliwości wystawienia ocen?

n=6 (oceny), k = 5 (uczniowie)

$6^5 = 7776$

Przykład

Oblicz, ile różnych wyników można otrzymać, rzucając 4 razy monetą.

Wyniki rzutów są wybierane ze zbioru 2-elementowego $A = \{O, R\}$, $|A| = \mathbf{n} = 2$.

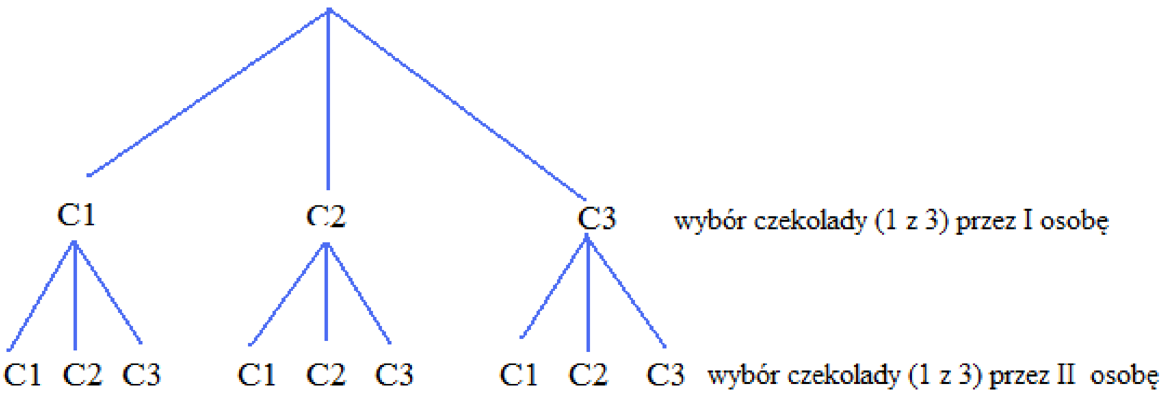
Rzucając 4 razy monetą tworzymy 4-wyrazowe ciągi, więc **k** = 4.

Liczba wyników jest równa liczbie $V_n^k = n^k = 2^4 = \mathbf{16}$

Odp. Można otrzymać 16 różnych wyników.

Przykład

Na ile różnych sposobów można wybrać 3 czekolady przez 2 osoby



Możliwości wyboru:

Ω = { (C1 C1) , (C1 C2), (C1 C3), (C2 C1), (C2 C2), (C2 C3), (C3 C1), (C3 C2) (C3 C3) }

$|\Omega| = 3^2 = 9$

$\boxed{Wn^k = n^k}$ n - ilość czekolad (mozliwości), k - ilość osób (obiektów)

Obsadzanie wolnych miejsc

Jeśli pierwszy obiekt można umieścić na jednym z n miejsc, drugi na jednym z n-1 miejsc,
trzeci na jednym z n-2 miejsc, a k -ty na jednym z n- (k-1) = n-k+1 miejsc,
to liczba możliwych obsadzeń jest równa:
n*(n-1)*(n-2)*…*(n-k+1) – *jest* ***k*** *czynników*

Przykład
Na ile sposobów można rozsadzić 5 osób na 6 wolnych miejscach?
n=6, k = 5; 6*5*..(6-5+1) = 6*5*...*2 = 6*5*4*3*2
6*5*4*3*2

Ustawianie się w kolejce

n różnych obiektów można ustawić jeden za drugim na
n! = n*(n-1)*(n-2)*…*2*1 = 1*2*3*…(n-1)*n

Przykład
Na ile sposobów można ustawić w kolejce 4 osoby?
4! = 1*2*3*4 = 24

Przykład
Ile jest możliwych kolejności w jakiej dobiegnie na metę 5 zawodników?
5! = 1*2*3*4*5 = 120

Wykluczenie części możliwości

Czasem łatwiej obliczyć w ilu wypadkach warunek nie jest spełniony.
Spełnienie warunku oblicza się wtedy przez odjęcie od ilości wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych, ilości, w których warunek nie jest spełniony (zdarzeń przeciwnych).
$|A| = |\Omega| - |A'|$

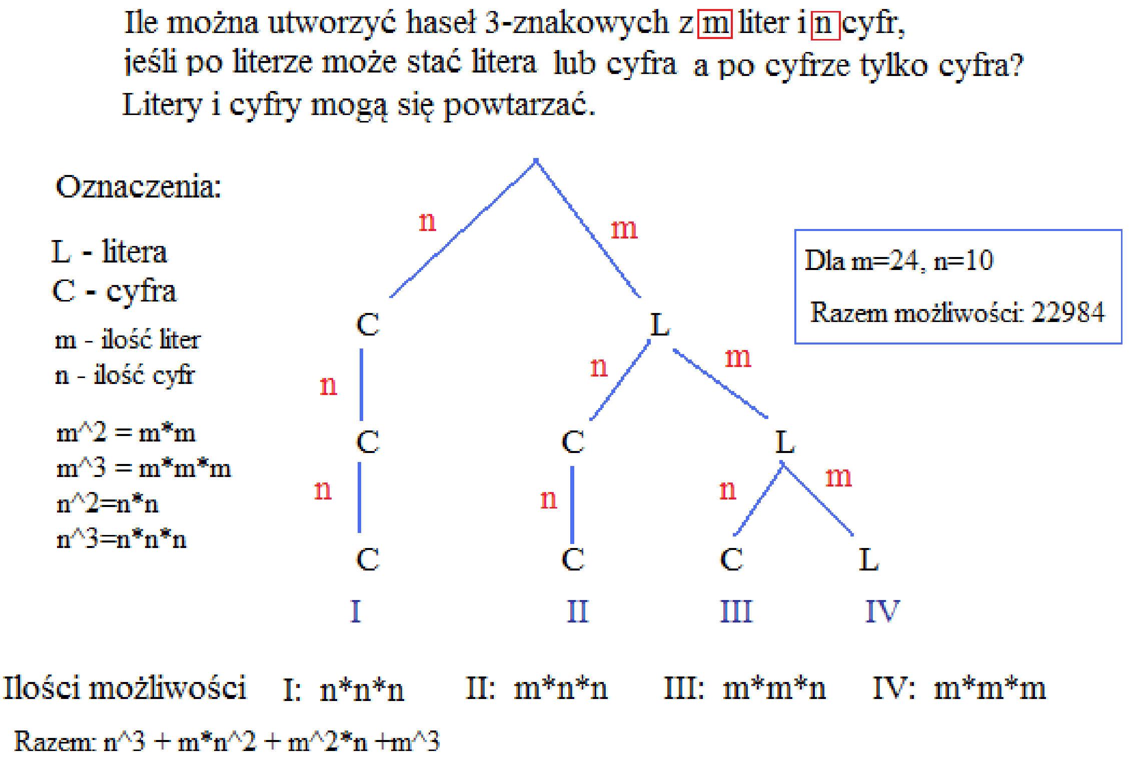
Przykład
Przy wyrzuceniu n razy monetą, ile jest przypadków m, w których orzeł wystąpił choć raz?
Ogółem jest 2^n możliwości (ciągów rzutu monetą).
Wśród nich jest tylko jedna możliwość, w których orła nie ma ani razu.
Zatem takich, w których orzeł wystąpił co najmniej jeden raz jest: $|A| = m = 2^n - 1$.
Dla n = 3 → m = $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ *(Orła nie ma ani razu w ciągu {RRR})*
Dla n = 6 → m = $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ *(Orła nie ma ani razu w ciągu {RRRRRR})*
Dla n = 8 → m = $2^6 - 1 = 256 - 1 = 255$ *(Orła nie ma ani razu w ciągu {RRRRRRRR})*

Drzewa stochastyczne – drzewa zdarzeń

W trudniejszych sytuacjach może się przydać narysowanie drzewa.
W drzewie tym wierzchołki rozgałęziają w zależności od rozwoju sytuacji.
Każdej krawędzi odpowiada liczba wskazująca na ile sposobów dany etap rozwoju sytuacji można zrealizować.
Mnoży się liczby możliwości rozmieszczone wzdłuż kolejnych krawędzi danej gałęzi by obliczyć na ile sposobów można zrealizować dany ciąg wydarzeń (tworzący daną gałąź drzewa).

Ilość sumaryczną wszystkich możliwości obliczamy sumując wyniki możliwości dla wszystkich gałęzi drzewa.

<u>Przykład:</u>
Ile można utworzyć haseł trzyznakowych z m liter i n cyfr, jeśli po literze może stać litera lub cyfra, a po cyfrze zawsze tylko cyfra? Litery i cyfry mogą się powtarzać.



Jeśli hasło 3-znakowe może składać się
z 2 liter i 2 cyfr to jest 32 możliwości.
z 10 liter i 2 cyfr to jest 1248 możliwości.
z 10 liter i 10 cyfr to jest 4000 możliwości.
z 24 liter i 10 cyfr to jest 22984 możliwości.
Z 26 liter i 10 cyfr to jest 27936 możliwości (alfabet łaciński).

Kule w urnach

Jeżeli w **k** rozróżnialnych (np. ponumerowanych) urnach mamy rozmieścić
n jednakowych, nierozróżnialnych kul
to liczba możliwości rozmieszczenia wyraża się wzorami:

1) Jeśli <u>niektóre urny mogą zostać puste</u>
$\mathbf{C^{n}_{n+k-1} = \binom{n+k-1}{n}}$ = (n +k -1)! / (n!*(n+k-1 – n)! = (n+k-1)! / (k-1)!

2) Jeśli <u>w każdej urnie musi się znaleźć przynajmniej jedna kula</u>
$\mathbf{C^{k-1}_{n-1} = \binom{n-1}{k-1}}$ = (n-1)! / (n-1 – k+1)! = (n-1)! / (n-k)!

Linki

http://www.matemaks.pl/wstep-do-rachunku-prawdopodobienstwa.html
http://www.matematyka.net/index.php/teoria/rachunek-prawdopodobienstwa
http://marmaj.math.uni.lodz.pl/Pros_11_12/19_Elementy_rach._p-stwa.pdf
http://www.medianauka.pl/prawdopodobienstwo-wstep
http://www.matemaks.pl/wstep-do-rachunku-prawdopodobienstwa.html
http://www.matematyka.net/index.php/teoria/rachunek-prawdopodobienstwa
http://marmaj.math.uni.lodz.pl/Pros_11_12/19_Elementy_rach._p-stwa.pdf
http://www.medianauka.pl/prawdopodobienstwo-wstep

Literatura:

Matematyka w otaczającym nas świecie: Alicja Cewe, M. Walczak, M. Kruk, inni
Matematyka. Podręcznik dla szkół ponadgimnazjalnych. Nowa Era.
Matura 2014. Matematyka. Operon.
Małe Tablice. Matematyka. Adamantan.
Matematyka. SMS. ParkEdukacja