# Kombinatoryka

Spis treści



## Kombinatoryka a prawdopodobieństwo

W rachunku prawdopodobieństwa nie zawsze można stosować metodę drzew.
Obliczenia kombinatoryczne w uogólniony sposób pozwalają policzyć możliwe zdarzenia elementarne, a także liczbę zdarzeń elementarnych będących podzbiorami zdarzeń elementarnych.

**Kombinatoryka** jest działem matematyki, który pomaga odpowiedzieć na pytania typu:
*"ile jest możliwych wyników w rzucie monetą?",*
*"Na ile sposobów możemy wybrać delegację trzyosobową  z klasy 20 osobowej?"*, itp.
Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na *permutacje*, , *wariacje bez powtórzeń, wariacje z powtórzeniami, kombinacje.*

Do rozwiązania większości zadań często  wystarcza **reguła mnożenia** i wzór na **kombinację**.

## Reguła mnożenia

Reguła mnożenia przydaje się podczas rozwiązywania wielu zadań z kombinatoryki i prawdopodobieństwa.

Przykłady

Przykład
W rzucie monetą 2 razy  Ile jest wszystkich wyników tego doświadczenia?
Rozwiązanie:
Możliwe są 2 zdarzenia – może wypaść orzeł O lub reszka R.
Jeśli rzucamy 2 razy monetą to możliwe są wyniki:
W I rzucie:  {O, R} – 2 możliwości
W II rzucie: {O, R} – 2 możliwości
Łącznie: są 4 możliwości: 2*2 = 4 → {  (O, O), (O, R), (R, O), (R, R)

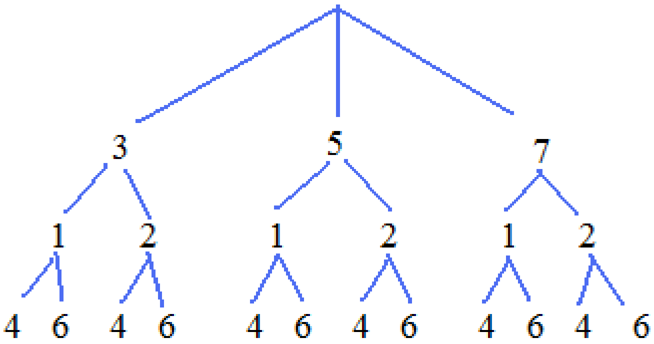
Analogiczne gdy rzucamy 3 razy monetą to są:
W I rzucie 2 możliwości  i  w II rzucie  2 możliwości  i w III rzucie 2 możliwości

Razem 2*2* 2 = 8 możliwości

**W regule mnożenia** spójnik **„i”** <u>zamieniamy</u> zawsze na znak mnożenia

**Reguła mnożenia**
Jeżeli wynik pewnego doświadczenia losowego zależy od kolejno podejmowanych <u>decyzji</u>,
to <u>liczba wszystkich różnych wyników tych decyzji</u> równa się **$n_1$*$n_2$* …$n_k$**
jeżeli:
**$n_1$** – liczba możliwości wyborów przy podejmowaniu **I** decyzji
**$n_2$** - liczba możliwości wyborów przy podejmowaniu **II** decyzji
….
**$n_k$** - liczba możliwości wyborów przy podejmowaniu **k**-tej decyzji, czyli decyzji ostatniej

<u>Przykład:</u>
*Ze zbiorów A1 = {3, 5, 7}, A2 = {1, 2}, A3 = {4, 6} wybieramy kolejno po jednej cyfrze i tworzymy liczbę 3-cyfrową. Pierwszą cyfrę wybieramy ze zbioru A1, drugą z A2, trzecią ze zbioru A3.*




Ilość możliwych zdarzeń elementarnych tego doświadczenia: |Ω| = 3*2*2 = 12
Ω = {314, 316, 324, 326, 514, 516, 524, 526, 714, 716, 724, 726}
Ilość liczb, których cyfra setek jest cyfra 3 lub cyfra 7: |A| = 1*2*2 + 1*2**2
Liczby: 314, 316, 324, 326, 714, 716, 724, 726

**Reguła mnożenia**
Jeżeli zbiór A ma **m** elementów, a zbiór B ma **n** elementów, to <u>liczba różnych par **(x, y)**,</u>
takich, że x ∈ A oraz y ∈ B, jest równa **m*n**

<u>Przykład 1:</u>
*Rzucamy 2 monetami: 2-złotówkową i 5-złotówkową:*
Oznaczenia:
o – otrzymanie orła na monecie 2-zł, r – reszki na monecie 2 zł
O - otrzymanie orła na monecie 5-zł, R – reszki na monecie 5 zł
Możliwe wyniki doświadczenia: oO, oR, rO, rR
Ilość zderzeń (par) = 2*2 = 4

<u>Przykład 2:</u>
*Rzucamy 2 sześciennymi kostkami do gry: niebieską i czarną.*
Możliwe wyniki:
1 1 2 1 3 1 4 1 5 1 6 1
1 2 2 2 3 2 4 3 5 2 6 2
…

1 6     2 6     3 6     4 6     5 6     6 6
Liczba zdarzeń: 6 * 6 = 36   (rozróżniamy wyniki takie jak 2 3  i 3 2)

Przykład 3:
*Ile jest punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna x należy do zbioru: A = {1, 2, 3, 4, 5}, a druga do zbioru B = {1, 2, 3}?*
|A| = 5,  |B| = 3,  |A|*|B| = 5*3 = 15

**Reguła mnożenia** sformułowana bardziej ogólnie
Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu **n** decyzji,
przy czym
decyzję pierwszą można podjąć na $\mathbf{k_1}$ sposobów,
drugą na $\mathbf{k_2}$ sposobów, …,
n-tą na $k_n$ sposobów,
to takiego wyboru można dokonać na
$k_1*k_2*\ldots*k_n$ sposobów

Przykład
*Ile może być numerów rejestracyjnych mających na początku 2 litery, a następnie 5 cyfr, jeśli mogą w nich występować tylko litery WA oraz cyfry 1, 4, 6, 8 (litery i cyfry mogą się powtarzać)?*
2 pozycje na litery, na każdej 2 możliwości: $2*2 = 2^2$,
5 pozycji ma cyfry, na każdej 4 możliwości: $4*4*4*4*4 = 4^5 =$
Ilość numerów: 2*2*4*4*4*4 *4 = 2^2 * 4^5 = 4*1024 = 4096

**Zasada mnożenia**
Jeśli wybór zależy od podjęcia kolejno n decyzji, przy czym podejmując
pierwszą decyzję, mamy $\mathbf{d_1}$ możliwości,
drugą $\mathbf{d_2}$ możliwości, …
podejmując n-tą decyzję mamy $\mathbf{d_n}$ możliwości,
to wybór ten może być dokonany na
$\mathbf{d_1 * d_2 * \ldots d_n}$ sposobów

Przykład:
*Mamy 2 długopisy i 3 ołówki.*
*Na ile sposobów można wybrać zestaw złożony z długopisu **i** ołówka?*
Zasada mnożenia:
Długopis można wybrać na 2 sposoby, ołówek na 3 sposoby.
Zestaw można wybrać na **2*3 = 6** sposobów

**Zasada dodawania**
Jeżeli wybór polega na podjęciu jednej z n decyzji, przy czym podejmując tę decyzję, mamy odpowiednio d1, d2, … dn możliwości, to wybór ten może być dokonany na
$\mathbf{d_1 + d_2 + \ldots d_n}$ sposobów

Przykład:
*Ile różnych wyrazów jednoliterowych lub dwuliterowych można utworzyć z wyrazu „kok”?*
Zasada dodawania:
Wyrazy jednoliterowe: k, o – 2 wyrazy
Wyrazy 2-literowe: ko, ok., kk – 3 wyrazy
Liczba wszystkich wyrazów: 2 + 3 = 5

**Reguła dodawania**
Jeśli zbiory A i B są rozłączne, to liczba elementów zbioru A ∪ B
równa się sumie liczby elementów zbioru A i liczby elementów zbioru B

Jeśli zbiory A i B są rozłączne to **|A ∪ B| = |A| + |B|**

Przykład
*Rzucamy 4 razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby 4-cyfrowej.*
*Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których suma cyfr jest równa 6?*
Suma cyfr może być równa 6 w 2 przypadkach:

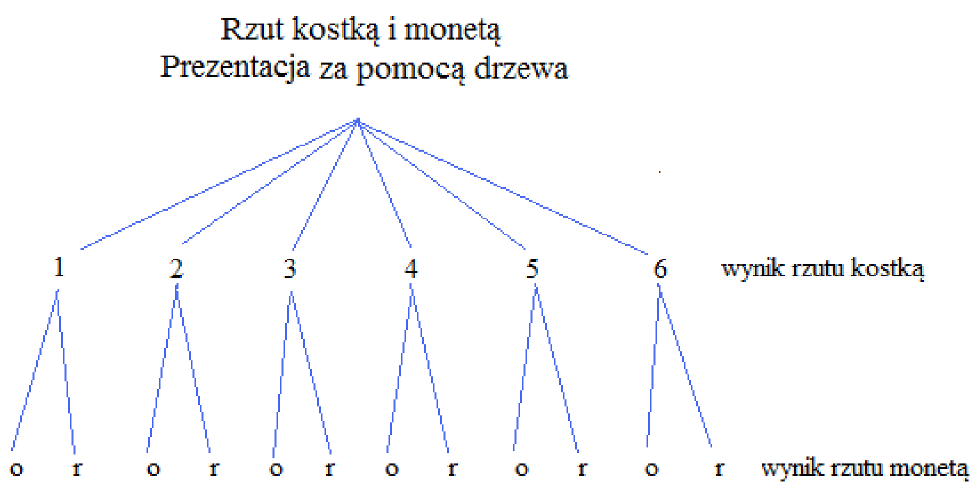
A. W zapisie liczby występuje trzy razy cyfra 1 oraz jeden raz cyfra 3. Są **4** takie liczby
   1113, 1131, 1311, 3111
B. W zapisie występują dwa razy cyfra 2 i dwa razy cyfra 1 Jest **6** takich liczb:
   1122, 1212, 2112, 2121, 2211

Razem jest: 4 + 6 = 10

Jeżeli obliczając liczbę możliwych wyników doświadczenia losowego,
w toku rozumowania używamy spójnika:
**i** - to w obliczeniach wykonujemy mnożenie
**lub** - to w obliczeniach wykonujemy dodawanie

## Prezentacja wyników za pomocą drzewa

Przykład
*Rzucono kostką i monetą. Przyjmujemy, że wynikiem doświadczenia jest para (a, b),*
*gdzie a jest liczbą oczek na kostce, zaś b – orłem lub reszką.*
*Ile jest możliwych wyników takiego doświadczenia?*



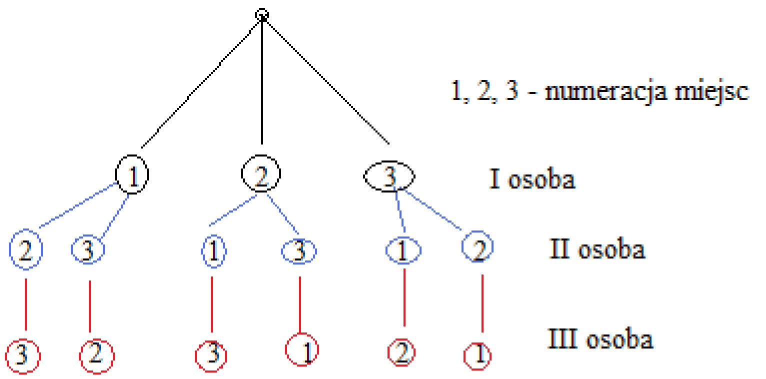

Wyniki doświadczenia:
(1, o), (1, r), (2, o), (2, r), (3, o), (3, r), (4, o), (4, r), (5, o), (5, r), (6, o), (6, r)

Wyników jest: 6 * 2 = 12

## Obliczanie liczby oczekiwanych wyników zdarzenia losowego – przykłady

Liczbę oczekiwanych wyników można zliczać różnymi metodami, m. innymi:
- za pomocą grafu
- przez wypisanie wszystkich wyników
- za pomocą tabeli
- poprzez stosowanie reguły mnożenia i reguły dodawania

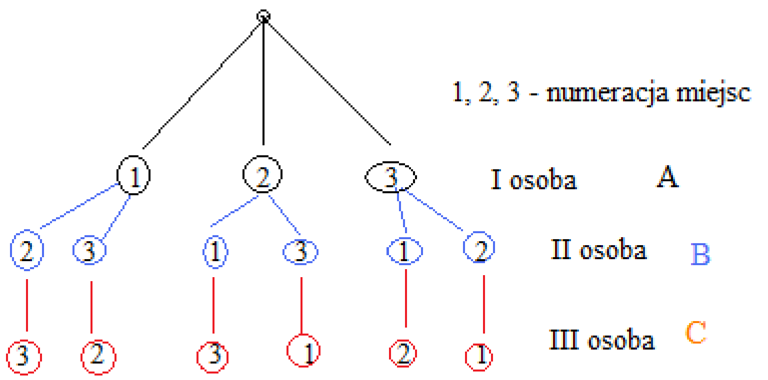
<u>Przykład</u>
a) Na ile sposobów 3 osoby mogą stanąć w rzędzie lub usiąść na ławce mieszczącej 3 osoby?
Pierwsza osoba ma wybór 3 miejsc, druga ma wybór już tylko 2 miejsc,
a trzecia ma tylko wybór jednego, pozostałego miejsca




Możliwe wyniki:
(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1)    3*2*1 = 6 możliwości

|A| = 3*2*1 = 6

b) Na ile sposobów 3 osoby mogą usiąść przy okrągłym stole, z ponumerowanymi krzesłami




Możliwe wyniki:
(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1)    3*2*1 = 6 możliwości

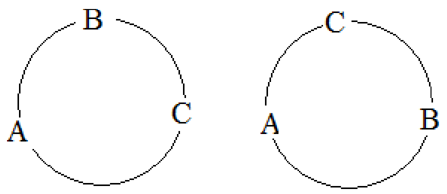
Kolejność numerów w kolejce lub krzeseł dla osób A, B, C

(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (C, A, B), (C, B, A) - kolejność osób

Analogicznie jak wyżej. Osobie przyporządkowujemy krzesło.
Są 3 osoby i 3 miejsca. |B| = 3*1*1 = 6

bo
Pierwsza osoba ma wybór 3 miejsc, druga ma wybór już tylko 2 miejsc, a trzecia ma tylko wybór jednego, pozostałego miejsca.

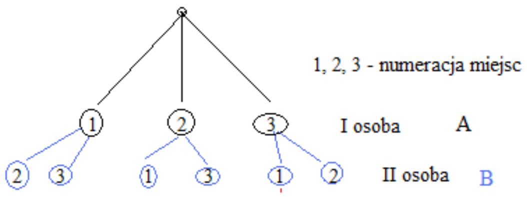
c) Na ile sposobów 3 osoby mogą stanąć w koło i złapać się za ręce?
Osobie przyporządkowujemy sąsiadów. Jest 2 sąsiadów, dlatego liczba możliwości jest 2.




(B –> A –><- C –><- B -><- A), (C-><- A –><- B –><- C -><-A)
-> - prawa ręka, <- lewa ręka danej osoby
|C| = 2

<u>Przykład</u>

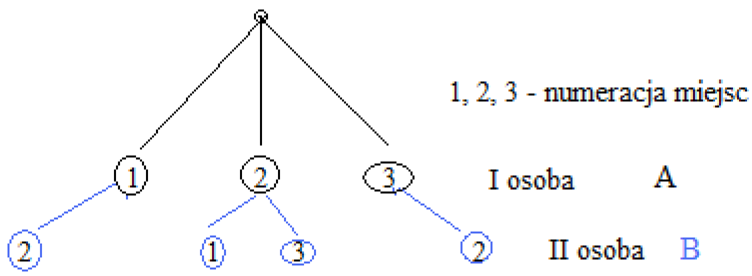
a) Na ile sposobów 2 osoby mogą usiąść na ławce mieszczącej 3 osoby?
|A| = 3*2 = 6




(1, 2), (1, _, 3). (2, 1), (3, 3), (3, 1), (3, 2) - miejsca zajmowane przez osoby A i B

(A, B , _), (A, _, B), (B, A, _), (B, _, A), (_, B, A) - usytuowanie osób na miejscach 1, 2, 3
_ - miejsce wolne

b) Na ile sposobów 2 osoby usiąść obok siebie na ławce mieszczącej 3 osoby




Zajęte sąsiednie miejsca przez osobę A i B:
(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)

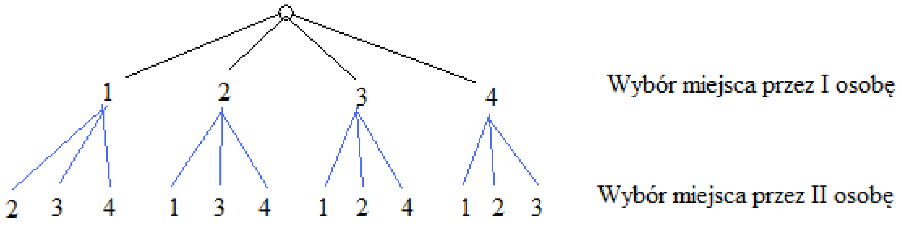
Osoby na kolejnych miejscach o numerach 1, 2, 3; _ puste miejsce

(A, B, _), (B, A, _), (_, A, B), (_, B, A)

|A| = 1 + 2 + 1 = 4

c) Na ile sposobów 2 osoby mogą siedzieć na ławce mieszczącej 4 osoby?

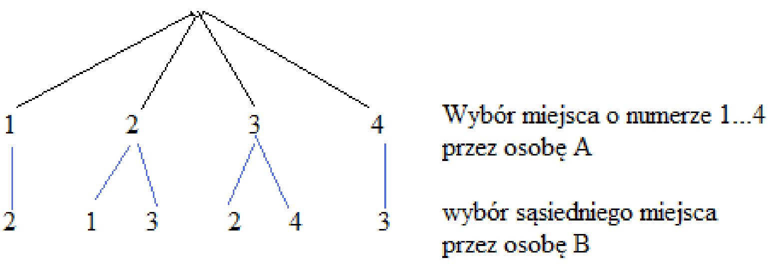
2 osoby, 4 miejsca na ławce.
Osoby nie muszą siedzieć koło siebie




|A| = 4*3 =12 sposobów

d) Na ile sposobów mogą siedzieć 2 osoby obok siebie, na ławce mieszczącej 4 osoby?

2 osoby: A i B, ławka ma 4 miejsca: 1, 2, 3, 4



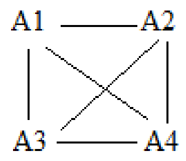

Wybrane miejsca przez osobę A oraz B:
(1, 2),, (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)

Usytuowanie osób na kolejnych miejscach; _ miejsce puste:
(A, B, _, _), (B, A, _, _), (_, A, B, _), (_, B, A, _), (_, _, A, B), (_, _, B, A)

|A| = 1 + 2 + 2 + 1 = 6

Przykład
Spotkało się 4 przyjaciół. Każdy witał się z każdym. Ile było powitań?

Cztery osoby, każda sita się z każdą




A1, A2 i A2, A2 to ta sama para

I sposób

A = {(A1, A2), (A1, A3), (A1, A4), (A2, A3), (A2, A4), (A3, A4)}

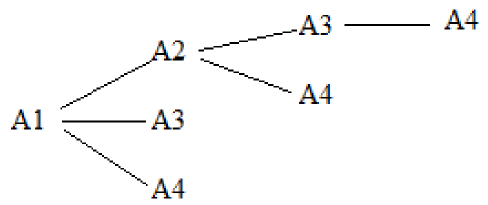
|A| = 6

II sposób

Każda z 4 osób ma 3 powitania

(4 *3 ) / 2 = 12/2 = 6

III sposób




3 + 2 + 1 = 6

<u>Ogólnie:</u> n osób: Ilość powitań: n*(n-1) / 2

<u>Przykład</u>

Pięciu przyjaciół wysłało SMS ’a, każdy każdemu. Ile wysłano SMS -ów?

Każdy z 5 do pozostałych czterech.

5*4 = 120

<u>Ogólnie</u>: n – osób: n*(n-1) możliwości wysłania SMS -ów każdy do kazdego

<u>Przykład</u>

Oblicz ile jest

a) Ile jest wszystkich liczb naturalnych 4-cyfrowych?

TSDJ - tysiące, setki, dziesiątki, jedności

Na 1 miejscu (tysiące) może być 9 cyfr (bez zera), na następnych 10 – cyfry mogą się powtarzać

N = 9*10*10*10 = 9000

lub

N = 10*10*10*10 – 10*10*10 = 10000 – 1000 = 9000

b) Ile jest liczb naturalnych 3-cyfrowych o różnych cyfrach?

SDJ - setki: 9 możliwości, dziesiątki – 10-1 = 9 możliwości, jedności: 9 -1 = 8 możliwości (o 1 mniej)

N = 9*9*8 = 648

c) Ile jest liczb naturalnych 3-cyfrowych parzystych

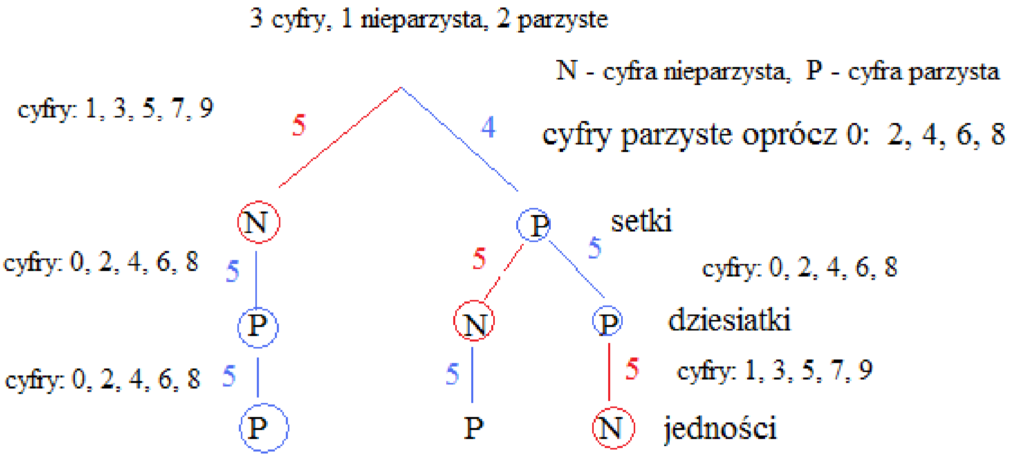
SDJ – setki: 9, D – 10, J – 5 (cyfry parzyste, czyli: 0, 2, 4, 6, 8)

9*10*5 = 450

lub

(10*10*10 – 10*10) / 2 = (1000-100) / 2= 900/2 = 450 - co druga liczba jest parzysta

d) Ile jest liczb 3-cyfrowych, takich, ze w zapisie 10-nym występuje jedna cyfra nieparzysta i 2 cyfry parzyste?




5*5*5 + 4*5*5 + 4*5*5 = 125 + 4*(5*5 +5*5) ) = 125+ 200 = 325

$\boxed{\text{325 możliwości}}$

<u>Przykład</u>

Ile jest liczb:

a) Ile jest wszystkich liczb naturalnych 5-cyfrowych?

N = 9*10*10*10*10 = 9*$10^4$ = 90000

b) Naturalnych 4-cyfrowych, których cyfry są różne?

N = 9*(10-1)*(9-2)*(9-3) = 9*9*8*7 = 4536

c) Liczb naturalnych 4-cyfrowych nieparzystych?

N = 9*10*10*5 = 4500 (cyfry mogą się powtarzać)

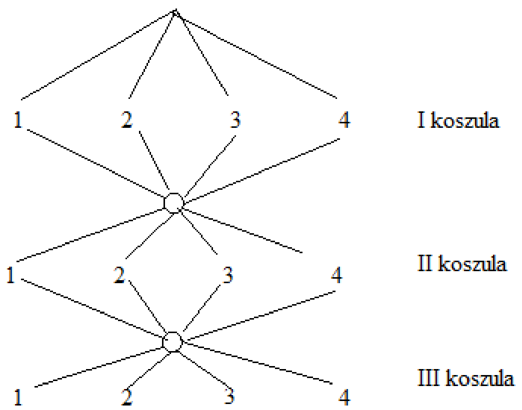
d) Liczb naturalnych 3-cyfrowych, w których zapisie występują tylko liczby nieparzyste lub tylko liczby parzyste

N = 5*5*5 + 4*5*5 = 125 + 100 = 125 (125 nieparzystych i 100 parzystych)

<u>Przykład</u>

a) Na ile sposobów można rozmieścić 3 koszule w 4 szufladach?

Każdą z 4 koszul można włożyć do jednej z 4 szuflad – każda ma 4 możliwości rozmieszczenia.
Możliwości rozmieszczenia jest 4*4*4 = 64



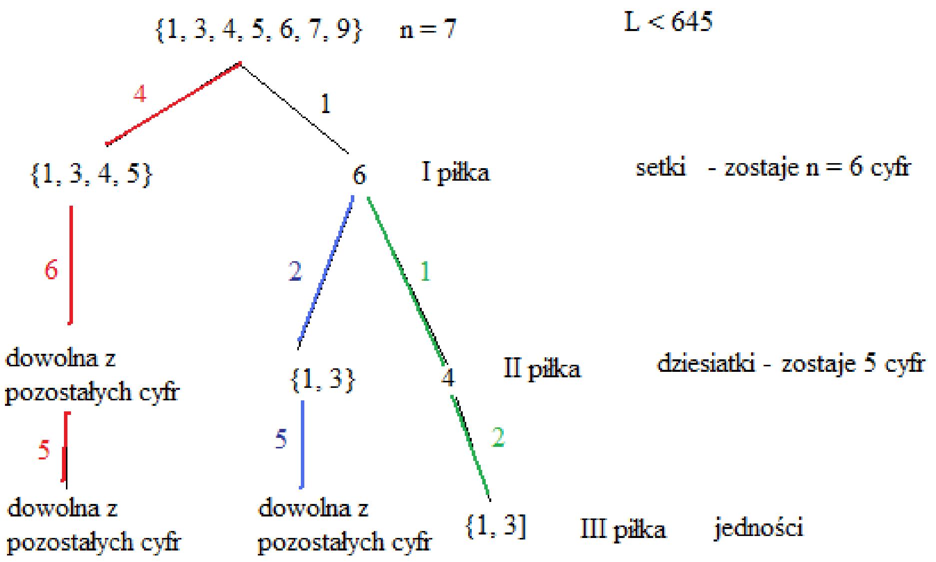

n = 4*4*4 = 4^3 = 64

b) Na ile sposobów można rozmieścić 4 koszule w 3 szufladach?
Każdą z 4 koszul można włożyć do jednej z 3 szuflad – (każda ma 3 możliwości rozmieszczenia)
$N = 3*3*3*3 = 3^4 = 81$

Przykład
Na ile sposobów można rozmieścić
a) 6 czapek w 4 szufladach?
$4*4*4*4*4*4 = 4^6 = 4096$ *każda czapka ma 4 możliwości, a jest 6 czapek*
b) 4 czapki w 6 szufladach?
$6*6*6*6 = 6^4 = 1296$ *każda czapka ma 6 możliwości, a są 4 czapki*

Przykład
W pudełku jest 7 piłeczek ponumerowanych: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Wybieramy kolejno 3 razy po jednej piłeczce i z cyfr tworzymy liczbę trzycyfrową. Pierwsza z wybranych jest cyfrą setek, druga cyfrą dziesiątek, trzecia cyfrą jedności.
a) Ile liczb mniejszych od 645?

W pudełku jest 7 piłeczek oznaczonych cyframi: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9.
Wybieramy 3 razy po jednej piłeczce i tworzymy liczbe 3-cyfrową. I cyfra - seteki, II - dziesiątki, III - jedności.
Ile można utworzyć liczb mniejszych od 645?



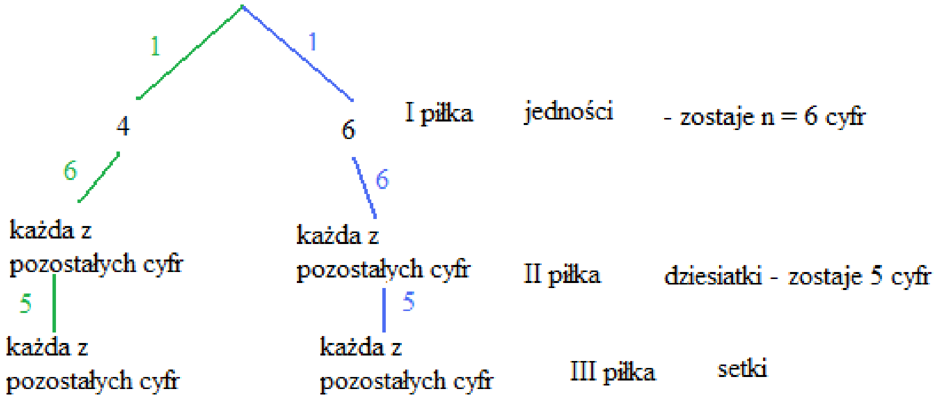

Liczb mniejszych od 645 można otrzymac:

$4*6*5 + 1 * ( 2*5 + 1*2 ) = 132$

b) Ile liczb parzystych?

W pudełku jest 7 piłeczek oznaczonych cyframi: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9.
Wybieramy 3 razy po jednej piłeczce i tworzymy liczbe 3-cyfrową. I cyfra - seteki, II - dziesiątki, III - jedności.
Ile można utworzyć liczb parzystych?

{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9}   n = 7   L < 645




Wszystkich liczb parzystych można otrzymać:

n = 1*6*5 + 1 *6*5 = 2*6*5 = 60

c) Ile jest liczb podzielnych przez 3

Warunek podzielności przez 3 spełniają trójki cyfr:
1, 3, 5   1, 4, 7   1, 5, 6   1, 5, 9
3, 4, 5   3, 5, 7   3, 6, 9
4, 5, 6   4, 5, 9
5, 6, 7
Takich trójek jest 10.
Z każdej trójki można utworzyć: 3*2*1 = 6 różnych cyfr
Liczb podzielnych przez 3 jest więc: 10*6 = **60**

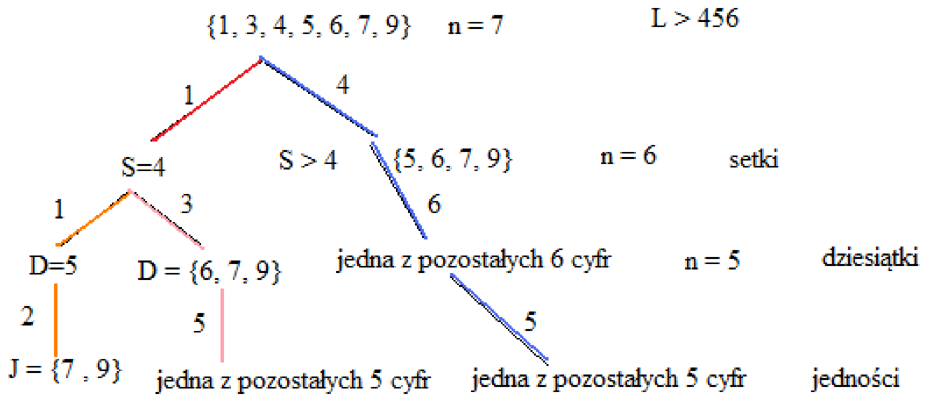
d) Ile jest wszystkich liczb 3-cyfrowych?

|{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9} | = 7
S D J   |S| = 7, |D| = 6, |J| = 5
|A| = 7*6*5 = 210

e) Ile jest liczb większych od 456?

1) S=4, D = 5, J = {7, 9} → 1*1*2 = 2 możliwości: 457, 459
2) S = 4, |D| = |{6, 7, 9}| = 3, |J| = 5 → 1*3*5 = 15 możliwości
3) S > 4: |S| = |{5, 6, 7, 9}| = 4, |D| =6, |J| = 5 → 4*6*5 = 120
   |A| = 1*1*2  1*3*5 + 4*6*5 = 1*(1*2 + 3*5) + 4*6*5  = 137

W pudełku jest 7 piłeczek oznaczonych cyframi: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9.
Wybieramy 3 razy po jednej piłeczce i tworzymy liczbę 3-cyfrową. I cyfra - seteki, II - dziesiątki, III - jedności.
Ile można utworzyć liczb : > 456




Wszystkich liczb > 456 można otrzymać:

$\underline{1*1*2 + 1*3*5} + \underline{4*6*5} = 2 + 15 + 120 = 137$

**f)** Ile jest liczb podzielnych przez 9

Suma cyfr dzieli się przez 9

1, 3, 5 4, 5, 9 5, 6, 7 1, 9, 8

Takich trójek jest 4.

Z każdej trójki można utworzyć: 3*2*1 = 6 różnych cyfr

Liczb podzielnych przez 9 jest więc: 4*6 = **24**

<u>Przykład</u>

Na ile sposobów można z grupy liczącej 10 osób (n=10) wybrać delegację składającą się z:

a) 2 osób (k=2)

Liczba wszystkich możliwości wyboru 2-osobowej delegacji:
wybór I osoby: 10 możliwości (ile liczy grupa) Ogólnie: n możliwości (ile liczy grupa)
wybór II osoby: (10-1) = 9 możliwości Ogólnie: n-1 możliwości
Liczba kolejności w jakiej 2 osoby zostały wybrane
wybór za I razem: 2 możliwości Ogólnie: k możliwości (ile liczy delegacja0
wybór za II razem: 1 możliwość Ogólnie: k-1 możliwości
m = 10*9 / (2*1) = 90/2 = 45

b) 3 osób

m = 10*9*8 / (3*2*1) = 120

<u>Przykład</u>

Na ile sposobów można z grupy liczącej 20 osób (n=20) wybrać delegację składającą się z:

a) 2 osób (k=2)

**m = n*(n-1)*…(n-k) / (k*(k-1)*(k-2)..*1**

m = 20*19 / (2*1) = 190

b) 3 osób

m = 20*19*18 / (3*2*1) = 6840/6 = 1140

c) 4 osób

m = 20*19*18*17 / (4*3*2*1) = 4845

# Elementy kombinatoryki

W kombinatoryce rozważa się zależności miedzy elementami **zbiorów** i wyrazami **ciągów**.
**Zbiór** składa się z elementów nieuporządkowanych – *np. jabłka w koszyku.*
**Ciąg** zawiera wyrazy uporządkowane – np. każde kolejne jabłko w ponumerowanym od **1** do **n** pudełku, każdy uczeń ma numer w dzienniku, w zawodnik sportowy jest oznaczony numerem itp.

## Ustawianie wszystkich elementów zbioru w pewnej kolejności

Tworzenie **n** -wyrazowych ciągów ze wszystkich elementów zbioru n -elementowego
Kolejność wybierania elementów jest istotna!
Liczba wszystkich możliwych ustawień: **n*(n-1)*(n-1)*…*2*1** = **n!**

Przykład:
*Na ile sposobów można rozdzielić 3 czekolady c1, c2, c3 pomiędzy 3 osoby?*
I osoba ma 3 możliwości otrzymania czekolady: c1, c2, c3. Załóżmy, że dostała c1.
II osoba ma już tylko 2 możliwości, w tym przypadku : c2 i c3. Załóżmy, że dostała c2.
III osoba – pozostała tylko jedna czekolada – jedna możliwość.
Wszystkich możliwości jest 3*2*1 = 3! = 6

## Wybieranie k elementów ze zbioru n –elementowego

**1. Wybrane elementy nie mogą się powtarzać i kolejność wybranych elementów jest istotna (k<=n)**
Tworzenie **k** – wyrazowych ciągów utworzonych z różnych elementów **n** – elementowego zbioru dla **k <= n**
Liczba wszystkich możliwości wyboru: **n*(n-1)*…[n – (k-1)]**

Przykład:
*Z cyfr **1, 2, 3, 4, 5** wybieramy dwie cyfry i tworzymy z nich liczbę 2-cyfrową.*
*Ile można utworzyć takich liczb?*
Cyfrę jedności można wybrać spośród 5 cyfr na 5 sposobów. Załóżmy, że wybrano 1.
Cyfrę dziesiątek można wybrać z 4 pozostałych cyfr: 2, 3, 4, 5 – cztery sposoby.
Wszystkich możliwości jest: 5*4 = 20

**2. Wybrane elementy mogą się powtarzać i kolejność wybranych elementów jest istotna**
Tworzenie **k** – wyrazowych ciągów utworzonych z elementów **n** – elementowego zbioru *( k <= n)*
Liczba wszystkich możliwości wyboru: **n*n*n…*n *(k razy)* =** $n^k$

Przykład:
*Ile różnych liczb 4-cyfrowych można utworzyć z cyfr 6, 7, 8?*
Cyfrę jedności można wybrać z cyfr 6, 7, 8 na 3 sposoby – są 3 możliwości,
Cyfrę dziesiątek można wybrać spośród cyfr 6, 7, 8, są więc też 3 możliwości (cyfry mogą się powtarzać)
Cyfrę setek można wybrać spośród cyfr 6, 7, 8, są więc też 3 możliwości
Cyfrę tysięcy można wybrać spośród cyfr 6, 7, 8, są więc też 3 możliwości
Wszystkich możliwości jest 3*3*3*3 = $3^4$ = 81

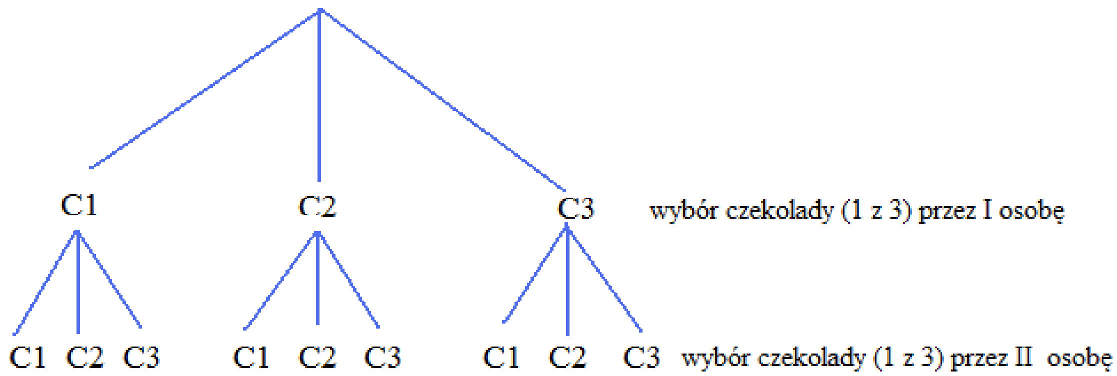
Przykład:
W sklepie są 3 rodzaje czekolad.

a) Na ile sposobów mogą wybrać te czekolady 2 osoby?
b) Ile jest możliwości wyboru przez te osoby (każda niezależnie) tej samej czekolady?
c) Na ile sposobów, k osób (obiektów) może dokonać wyboru spośród n czekolad (możliwości)?

**$Wn^k = n^k$** - wariacje z powtórzeniami

a) n = 3 (czekolady) k = 2 (osoby) $n^k = 3^2 = 9$

Na ile różnych sposobów można wybrać 3 czekolady przez 2 osoby




Możliwości wyboru:
Ω = { (C1 C1) , (C1 C2), (C1 C3), (C2 C1), (C2 C2), (C2 C3), (C3 C1), (C3 C2) (C3 C3) }
$|\Omega| = 3^2 = 9$

$\boxed{Wn^k = n^k}$ n - ilość czekolad (mozliwości), k - ilość osób (obiektów)

b) n = 3 (czekolada) k = 1 (osoba) $n^k = 3^1 = 3$

c) n - ilość czekolad (możliwości), k – ilość osób (obiektów) **$Wn^k = n^k$**

**3. Wybrane elementy nie mogą się powtarzać i kolejność wybranych elementów nie jest istotna**
(k<= n)
Tworzenie **k** – elementowych podzbiorów zbioru **n** – elementowego ( k <= n)
Liczba wszystkich możliwości wyboru:
**{ n*(n-1)*…[n – (k-1) ] } / [k*(k-1)*…*2*1]** = = { **n*(n-1)*…[n – (k-1) ] } / k!**

Przykład:
*Na ile sposobów można wybrać spośród **6 osób** delegację **3**-osobową?*
Pierwszą osobę można wybrać spośród 6 osób – 6 możliwości.
Drugą osobę można wybrać spośród 5 pozostałych osób – 5 możliwości
Trzecią osobę można wybrać spośród 4 pozostałych osób – 4 możliwości
Osoby można wybrać na: 6*5*4 = 120 sposobów.
Ponieważ kolejność wybieranych osób nie jest istotna, wszystkich możliwości jest:
120/3! = 120/6 = 20

# Kombinatoryka

## Silnia

Pojęcie silni:

**0! = 1**   **1! = 1**   **n! = 1*2*…*(n-1)*n**   *dla n > 1*
Dla liczby naturalnej n > 1 symbol **n!** (czyt. n silnia)
oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n
**n! = 1*2*3*…*n**

**n! = 1,** gdy n $\in \{0, 1\}$
**n! = (n-1)!*n**, gdy n $\in N \setminus \{0, 1\}$

<u>Wzór rekurencyjny</u>: **0! = 1, (n+1)! = (n+1)*n!**

### Symbol Newtona $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

Czytamy **„n po k”** lub **„n nad k”**

Symbol Newtona oznacza liczbę określoną następująco:

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$ = $\frac{n*(n-1)*(n-2)*\ldots(n-k+1)}{1*2*3*\ldots*k}$ gdy n ∈ N, k ∈ N i n >= k

Jeśli n ∈ N, k ∈ N i n >= k, to:

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$

$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = n$

## Permutacja

## Permutacja <u>bez powtórzeń</u>

**n** –elementowego zbioru – każdy **n** –wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Permutacjami, przestawieniami albo przemianami n różnych elementów nazywamy ustawienie w rząd jeden element za drugim tych n elementów, przy czym w każdej permutacji porządek ustawienia jest inny.
Jeśli mamy np. **2** elementy A i B, to możemy z nich utworzyć **2** permutacje: AB i BA *(2! = 1*2 = 2).*
Jeśli mamy 3 elementy A, B i C to możemy utworzyć 6 permutacji:
ABC ACB     BAC BCA     CAB CBA     *(2! = 1*2*3 = 6)*

Jeżeli w doświadczeniu losowym ze zbioru n –elementowego wybieramy elementy w ten sposób, że:
- wybieramy n elementów
- istotna jest kolejność wybierania elementów,
to tworzymy ciąg n – wyrazowy, zwany permutacją tego zbioru

**Permutacją** zbioru n -elementowego {a1, a2, …, an} nazywamy n –wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

**Permutacja** to ustawienie wszystkich elementów zbioru w pewnej kolejności.
Dwie permutacje tego samego zbioru różnią się między sobą co najwyżej kolejnością elementów.

Z permutacjami mamy do czynienia, gdy określamy liczbę wszystkich ciągów, jakie możemy utworzyć ze wszystkich elementów danego zbioru, którego liczbę oznaczamy przez **n**.

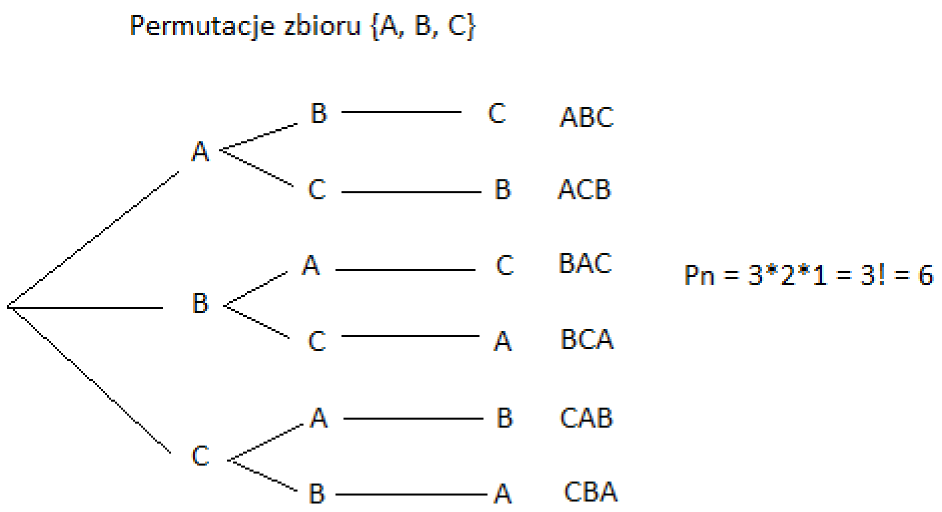
Liczba wszytkich permutacji zbioru n -elementowego wyraża się wzorem:
$\mathbf{P_n = n!}$ gdzie $n \in N$

**n!** - czytamy n silnia

**Permutacja** to ustawienie wszystkich elementów zbioru w pewnej kolejności.
Dwie permutacje tego samego zbioru mogą się różnić między sobą co najwyżej kolejnością elementów.

Na przykład zbiór {a, b} ma **2** permutacje: {a, b} i {b, a}
Zbiór A= {a, b, c} ma **6** permutacji: (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b), (a, c, b), (b, a, c), (c, b, a)

Liczba $\mathbf{P_n}$ permutacji rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem **n**.
$P_2 = 2$, $P_3 = 6$, $P_4 = 24$, $P_5 = 120$, $\mathbf{P_6} = \mathbf{720}$ itd.




Przykład:
*Na ile sposobów można ustawić w szereg 6 uczniów?*
$P_6 = 6! = 1*2*3*4*5*6 = 720$

Przykład
*Na ile sposobów można posadzić przy okrągłym stole 5 osób?*
$P_5$ = 5! = 1*2*3*4*5 = 120

Przykład:
*Mamy 8 książek o różnokolorowych okładkach na półce. Ile jest możliwości ustawienia tych książek?*
Liczba elementów zbioru, z którego tworzymy ciąg: n = 8
P8 = 8! = 1*2*3*4*5*6*7*8 = 40320

Przykład:
*Na ile sposobów można ustawić na półce **3** różne książki?*
Oznaczmy książki numerami: 1, 2, 3 i wypiszmy wszystkie możliwe ustawienia:
1 2 3    1 3 2    2 1 3    2 3 1    3 1 2    3 2 1.
Trzy książki można utworzyć na 3! sposobów: $P_3$ = 3! = 1*2*3 = 6

Przykład:
*Na ile sposobów można ustawić **8** zawodników na 8 pasach startowych bieżni?*
$P_8$ = 8! = 1*2*3*4*5*6*7*8 = 6!*7*8 = **720***56 = 40320

Przykład
a) *Na ile sposobów można ustawić w kolejce 3 dziewcząt i 2 chłopców?*

3 + 2 = 5
(3+2)! = 5! = 120 – permutacje

b) *Co w sytuacji, gdy dziewczęta mają stać przed chłopcami?*

Rozpatrujemy w tej sytuacji 2 kolejki: kolejkę dziewcząt i chłopców.
3! = 6 – sposobów ustawienia w kolejce dziewcząt
2! = 2 - sposoby ustawienia w kolejce chłopców
Na podstawie reguły mnożenia: 3! * 2! = 6*2 = 12 ustawień

**Permutacje z powtórzeniami** – elementy w zbiorze powtarzają się $\mathbf{n_1, n_2, \ldots n_k}$ razy
$(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$

Przykład
Jeżeli spośród elementów: a, b i c, element **a** weźmiemy **2** razy, element **b** jeden raz
i element **c** jeden raz,
możemy utworzyć następujące permutacje z powtórzeniami.
{a,a,b,c}, {a,a,c,b}, {a,b,a,c}, {a,b,c,a}, {a,c,a,b}, {a,c,b,a},
{b,a,a,c}, {b,a,c,a}, {b,c,a,a}, {c,a,a,b}, {c,a,b,a}, {c,b,a,a}

Ilość permutacji z powtórzeniami:

$$P\mathbf{n'} = \mathbf{P_n}^{\mathbf{n1, n2, \ldots nk}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n1}! * \boldsymbol{n2}! * .. \boldsymbol{nk}!}$$

Mając dany zbiór **n** -elementowy permutacją z powtórzeniami elementów zbioru nazywa się każdy ciąg **n** -wyrazowy, którego wyrazy występują odpowiednio $\mathbf{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ razy.

Definicję permutacji z powtórzeniami można opisać następująco:
1) Kolejność elementów jest istotna
2) Elementy powtarzają się z określoną częstotliwością

Przykład
*Dane są elementy x, y i z, z czego elementów x i z użyto jeden raz natomiast elementu y użyto dwa razy. Ile jest permutacji.*
$n1 = 1$, $n2 = 2$, $n3 = 1$
Permutacje:
(x, z, y, y), (z, x, y, y), (z, y, x, y), (x, y, z, y), (y, z, x, y), (y, x, z, y),
(y, z, y, x), (y, x, y, z), (y, y, z, x), (y, y, x, z), (z, y, y, x), (x, y, y, z).
Ilość takich permutacji to:
$Pn' = 4! / (1!*2!*1!) = 24/2 = 12$

Przykład
*Na ile sposobów można ustawić 3 litery: a, a, b?*
A = {a, a, b}
Możliwości – permutacje: (aab), (baa), (aba)
$n1 = 2$, $n2 = 1$ $n = n1+n2 = 2 + 1 = 3$
$P' = n!/ n1!*n2!) = 3!/ (2!*1!) = 6 / 2 = 3$

## Wariacje

Wariacjami albo rozmieszczeniami po k elementów wybranych z n elementów (k <n) nazywamy takie ustawienie tych k elementów, przy którym w każdej wariacji porządek ustawienia jest inny.

Przykład
Ilość elementów n = 5. Elementami są litery A, B, C, D, E.
Tworzymy z tych 5 liter zespoły (wariacje) dwuliterowe (k=2):
AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED.
Z 5 liter powstało 20 zespołów (wariacji) 2-literowych.
Ilość tych zespołów jest ilością wariacji z 5-ciu elementów po 2.
Ilość wariacji z n elementów po k oznaczamy $\mathbf{V_n^k}$ lub $A_n^k$

### Wariacja bez powtórzeń

**Wariacja k –wyrazowa bez powtórzeń** zbioru n – elementowego – każdy k –wyrazowy ciąg o różnych wyrazach ze zbioru n –elementowego.
Z wariacją bez powtórzeń mamy do czynienia, gdy tworzymy ciąg z elementów danego zbioru i ciąg ten nie musi się składać ze wszystkich elementów zbioru.
Np. w zbiorze jest 20 elementów a ciąg jest 5 elementowy.
„Bez powtórzeń" oznacza, że żaden element tworzonego ciągu nie może się powtarzać.
Np. w przypadku losowania kolejnych elementów ciągu, element wylosowany nie wraca so puli – losowanie bez zwracania.
Liczbę elementów zbioru oznaczamy przez **n**, a liczbę elementów powstałego ciągu przez **k**.
Ilość wariacji bez powtórzeń, tworzonej ze zbioru **n** –elementowego, a ciąg tworzony ma **k** elementów - oznaczamy przez $\mathbf{V_n^k}$

Liczba wariacji bez powtórzeń:
$\mathbf{V_n^k} = \mathbf{n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-k+1)} = \mathbf{n! / (n-k)!}$ gdzie $n \in N^+$, $k \in N^+$ i $k <=n$

Jeżeli w doświadczeniu losowym ze zbioru n -elementowego wybieramy k elementów w ten sposób, że:
- wybrane elementy nie mogą się powtarzać

- kolejność wybranych elementów jest istotna
To tworzymy **k** -wyrazową wariację bez powtórzeń zbioru **n** – elementowego, gdzie *k <=n*

Uwaga: W <u>kalkulatorze</u> oznaczenie: **nPr = n! / (n-r)!**

Każda <u>n –elementowa wariacja bez powtórzeń</u> zbioru n –elementowego jest jego <u>permutacją</u>

<u>Przykład</u>
*Ze zbioru {a, b, c} można utworzyć sześć 2-wyrazowych wariacji bez powtórzeń*
(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b)
n=3, k = 2
$V_3^{\,2} = 3*2*1 = 6$
$V_3^{\,2} = 3!/(3-2)! = 1*2*3 = 6$

<u>Przykład:</u>
*Pewien kod tworzymy z 3 liter wybranych spośród następujących: A, B, C, D, E, F, G, H, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?*
Na I miejscu można wpisać jedną z 8 liter, na II miejscu jedną z pozostałych 7 liter, na trzecim jedną z pozostałych sześciu.
$V_8^3 = 8*7*6 = 8!/ (8-3)! = 8!/5! = 5!*6*7*8/5! = 6*7*8 = 336$

<u>Przykład:</u>
A = {a, b, c} – zbiór wyjściowy – n = 3
Dla k = 2
$V_3^2 = 3!/(3-2)! = 3!/1! = 3! = 1*2*3 = 6$ {ab, ba, ac, ca, bc, cb}

<u>Przykład</u>
*Spośród 25 zawodników zostanie wybranych 3 medalistów. Jaka jest liczba możliwych wyników?*
<u>$V_{25}^3 = 25*24*..(25-3+1) = 25*24*(25-3+1) = 25*24*23 = 13800$</u>
<u>$V_{25}^3 = 25!/(25-3)! = 22!*23*24*25/22! = 23*24*25 = 13800$</u>

<u>Przykład</u>
*Iloma sposobami można wyciągnąć 2 karty z talii złożonej z 52 kart?*
$V_{52}^2 = 52!/ (8-2)! = 50!*51*52 / 50! = 51*52 = 2652$

<u>Przykład</u>
Iloma sposobami można posadzić na kanapie 2-osobowej rodzinę złożoną z 8 osób?
V82 = 8!/ *8-2)! = 8!/6! = 6!*7*8 / 6! = 56

<u>Przykład:</u>
*Pewien kod jest czterocyfrowy i składa się z cyfr 1 do 9, przy czym żadna cyfra nie może się powtarzać.*
*Liczba elementów zbioru, z którego losujemy elementy wynosi 9 (cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – bez 0)*
*Liczba elementów ciągu wynosi 4 – kod zawiera 4 cyfry: k = 4*

$|\Omega| = V_9^4 = 9! / (9-4)! = 9!/5! = 5!*6*7*8*9 / 5! = 6*7*8*9 = 3024$
*Na kalkulatorze naukowym: **9 SHIFT nPr 4** = 3024*

## Wariacja z powtórzeniami

**Wariacja k – wyrazowa z powtórzeniami** zbioru **n** – elementowego – każdy **k** – wyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru n – elementowego.
Wariacje z powtórzeniami stosujemy w takich przypadkach jak wariacje bez powtórzeń ale z tą różnicą, że poszczególne elementy ciągu mogą się powtarzać.

Liczba wszystkich możliwych wariacji z powtórzeniami:
$\mathbf{W_n^k = n^k}$ gdzie $n \in N^+$, $k \in N^+$

Przykład:
*Z elementów zbioru {a, b} można utworzyć:*
*Cztery 2-wyrazowe wariacje z powtórzeniami:*
(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)
$W_2^2 = 2^2 = 4$
Osiem 3-wyrazowych wariacji z powtórzeniami:
(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a), (b, b, b), (b, b, a), (b, a, b), (a, b, b)
n =2, k = 3
$W_2^3 = 2^3 = 8$

Przykład:
A = {a, b, c}, n-3, k=2
$W_3^2 = 3^2 = 9$ Możliwe podzbiory: {ab, ba, ac, ca, bc, cb, aa, bb, cc}

Przykład:
*Ile jest wszystkich liczb 3-cyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1 i 2?*
Na każdej pozycji mogą być 2 cyfry. |1..2 | 1..2 | 1..2|
Każdą z 3 cyfr można wybrać na 2 sposoby,
zatem jest: 2*2*2 = 8 takich liczb (2 cyfry na każdej z 3 pozycji)
{111, 121, 211, 221, 112, 122, 212, 222}
n=2, k=3
$W_2^3 = 2^3 = 8$

Przykład
*Ile jest wszystkich liczb 3-cyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 2, 3, 4, 5?*
Na każdej pozycji mogą występować cyfry 1, 2, 3, 4, 5 – pięć cyfr.
n =5, k = 3 [1..5][1..5][1..5]
Jest 5*5*5 = 125 takich liczb
$W_5^3 = 5^3 = 125$

Przykład
*Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z liter: A, B, C, D, E, F, G, H, jeśli litery mogą się powtarzać.*
n=8, k = 5; Jest kodów: 8*8*8*8*8 (8 na każdej pozycji)
$W_8^5 = 8^5 = 32768$

## Kombinacja

**Kombinacjami** albo połączeniami nazywamy takie zespoły po **k** elementów wybranych z **n** elementów, w których te elementy różnią się między sobą wyłącznie jakością.
W kombinacjach nie bierze się pod uwagę porządku ustawienia.
Np. AB i BA to ta sama kombinacja.
Przykład
Elementami są litery: A, B, C, D, E, F.
Tworzymy z nich zespoły 2-literowe, przy czym zakładamy, że nie interesuje nas porządek liter, a tylko ich jakość.
Ilość utworzonych zespołów 2-literowych z danych sześciu liter wynosi 15.
Są to zespoły:
AB AC AD AE AF
BC BD BE BE BF
CD CE CF
DE DF
EF

Ilość kombinacji po **k** elementów branych z **n** elementów oznaczamy przez $\mathbf{C_n^k}$
Można zauważyć, że jeśli w każdej kombinacji złożonej z k elementów poprzestawiamy te elementy na wszystkie sposoby, to otrzymamy wszystkie możliwe wariacje po k elementów wybranych z n elementów.
Ponieważ jedna kombinacja zawiera k elementów, to ilość możliwych przestawień – permutacji tych **k** elementów wynosi **k!**.
Wszystkich kombinacji jest $\mathbf{Cn^k * k}$, zatem ilość wszystkich wariacji z $\mathbf{C_n^k}$ kombinacji będzie $\mathbf{Cn^k * k!}$.
Biorąc pod uwagę, że ilość wariacji z n elementów po k wynosi n!/(n-k)!, otrzymujemy:
$\mathbf{Cn^k * k! = n! / (n-k)!}$**,** stąd

$\mathbf{Cn^k = n! / (k!*(n-k)!}$
Często piszę się symbol $\mathbf{C_n^k}$ w postaci $\mathbf{(^n\ _k)}$

Przykład
*Iloma sposobami można wybrać poczet sztandarowy 3-osobowy z 10-ciu żołnierzy?*
$C_{10}^3 = (^{10}\ _3) = 10!/(3!*(10-3)! = 10!/(3!*7!) = 120$

Przykład
Iloma sposobami można rozdzielić 3 stypendia w całości między 9 kandydatów o tych samych kwalifikacjach?
$C_9^3 = 9!/(6!*3!) = 84$

## Kombinacja bez powtórzeń k elementów spośród n elementów *(0 <=k <=n)*

- każdy **k** –elementowy podzbiór zbioru **n** – elementowego.

Jeżeli w doświadczeniu ze zbioru **n** –elementowego wybieramy **k** elementów, w ten sposób, że:
- wybrane elementy nie mogą się powtarzać,
- kolejność wybranych elementów nie jest istotna,

To tworzymy **k** –elementową kombinację zbioru **n** -elementowego, gdzie *k <=n*

Przykład
Zbiór {a, b, c, d}
Dla k = 1 (kombinacje 1-elementowe): {a}, {b}, {c}, {d} → jedna kombinacja
Dla k = 2 (kombinacje 2-elementowe): {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d} → 2 kombinacje

Dla k = 3 (kombinacje 3-elementowe): {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d} → 4 kombinacje
Dla k = 4 (kombinacje 4-elementowe): {a, b, c, d} → jedna kombinacja

Liczba kombinacji bez powtórzeń:

$C_n^k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$ gdy $n \in N^+$, $k \in N^+$ i n >= k

$C_n^k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)*...*(n-k+1}{k!*(n-k)!}$ gdy $n \in N^+$, $k \in N^+$ i n >= k

**$C_n^k$ = nCk = n! / ( k!*(n-k)! )**

**$k!*C_n^k = V_n^k$** gdzie **$V_n^k$** – wariacja k -wyrazowa bez powtórzeń zbioru n - elementowego

Uwaga: W kalkulatorze oznaczenie: **nCr = n! / ( r!*(n-r)! )**

Przykład
A = {a, b, c} n = 3
Dla k = 2
$C_3^2$ = 3!/(2!*(3-2)! = 3!/(2!*1!) = 1*2*3/2 = 3
Możliwe podzbiory: {ab, ac, bc}

Przykład
Z klasy liczącej 19 dziewcząt i 12 chłopców, wybierana jest delegacja, w skład której wchodzą 3 dziewczyny i 2 chłopców. Na ile sposobów można to uczynić?
3 dziewczyny spośród 19 można wybrać na
$C_{19}^3$ sposoby = $(^{19}{}_3)$ = 19! / (3!*(19-3)! = 16!*17*18*19/6*16!=969
Dwóch chłopców spośród 12 można wybrać na $(^{12}{}_2)$ sposoby = 12!/ (2!*(12-2)!) = 66
$(^{19}{}_3)$ * $^{12}{}_2)$ = 969*66 = 63954 → delegację można wybrać na sposoby

Przykład
W „Dużym Lotku" skreślamy 6 liczb spośród 1.. 49 liczb.

1. Prawdopodobieństwo zdarzenia A, że trafnie skreślimy 3 liczby

$|\Omega| = C_{49}^6$ = 49! / (6!*43!) = 13 983 816
Trafnie kreślimy 3 liczby, gdy skreślimy 3 spośród wylosowanych przez maszynę losującą oraz 3 z 43 (49-6), których nie wylosowała maszyna.
$|A| = C_6^3 * C_{43}^3$ = 20 * 12341 = 246820
$P(A) = |A|/|\Omega|$ = 246820/13983816 ≈ 0,18

2. Prawdopodobieństwo trafienia szóstki

P(B) = 1: $C_{49}^6$ = 1 / 13983816

3. Prawdopodobieństwo trafienia piątki:

$(^6{}_5) * (^{49-6}{}_1) / (^{49}{}_6)$ = 6 * 43 / 13983816 = 258/13983816 ≈ 1/54201

4. Prawdopodobieństwo trafienia czwórki

$C_6^4 * C_{49-6}^{\ 1} / C_{49}^{\ 6}$ = 15545 / 13983816 = 15*903 / 13983816 = 13545 / 13983816 ≈ 1/1032

4. Prawdopodobieństwo trafienia trójki

$C_6^3 * C_{49-6}^{\ 3} / C_{49}^{\ 6}$ = 246820 / 13983816 ≈ 1/ 57

# Podstawowe zasady kombinatoryki

## Zasada mnożenia

Jeśli I obiekt daje **n** możliwości a drugi **m** możliwości, to przy rozpatrywaniu niezależnym tych obiektów, mamy: **n * m** możliwości

*Przykład: Ile można utworzyć kodów 2-znakowych, w których*
*- na miejscu I umieszczamy jedną z 20 liter*
*- na miejscu II jedną z cyfr 1 do 9*
Dane: n = 20, m = 9
n * m = 20*9 = 180 Odp. można utworzyć 180 kodów 2-znakowych, przy zadanych warunkach

Jeśli obiektów jest **k**,
pierwszy stwarza $\mathbf{n_1}$ możliwości, drugi $\mathbf{n_2}$, … ostatni $\mathbf{n_k}$ możliwości
I obiekty te możemy rozpatrywać niezależnie, to jest ogółem:
$\mathbf{n_1 * n_2 * \ldots * n_k}$ możliwości

Przykład:
*Trzy klasy liczą odpowiednio: 20, 30, 25 uczniów.*
*Ile 3-osobowych delegacji szkoły można utworzyć, biorąc po jednym uczniu z każdej klasy?*
k= 3, n1 = 20, n2 = 30, n3 = 25
20*30*25 = 15000 Odp. Można utworzyć 15000 delegacji trzyosobowych.

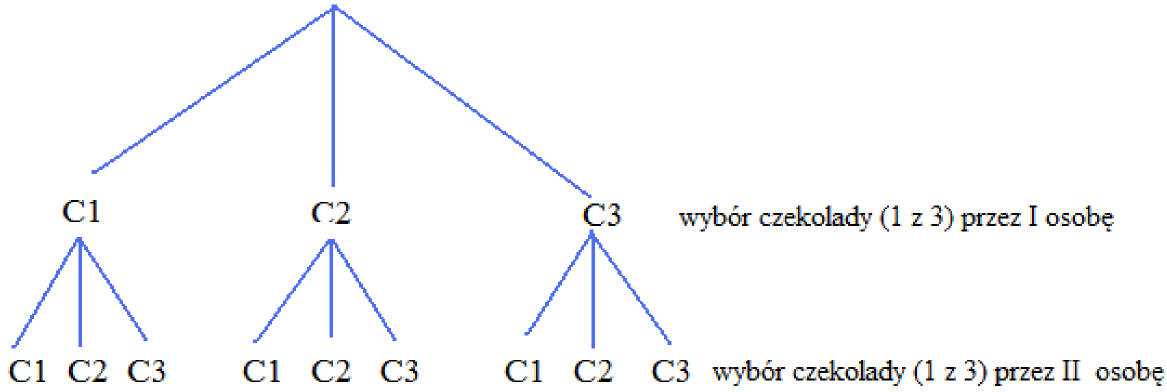
Jeśli obiektów jest **k** i każdy z nich ma tyle samo **n** możliwości,
to ogółem możliwości jest $\mathbf{n^k}$
**Wariacje z powtórzeniami**: $\mathbf{W_n^k = n^k}$

Przykład:
*Sześciu uczniów ma oceny w skali 2 do 5 (1, 3, 4, 5 – 4 oceny). Ile jest możliwości wystawienia ocen?*
n = 4 (oceny), k = 6 (uczniowie)
$4^6 = 4096$
Pięcioro uczniów ma oceny w skali 1 do 6. Ile jest możliwości wystawienia ocen?
n=6 (oceny), k = 5 (uczniowie)
$6^5 = 7776$

Przykład
*Oblicz, ile różnych wyników można otrzymać, rzucając 4 razy monetą.*
Wyniki rzutów są wybierane ze zbioru 2-elementowego A = {O, R}, |A| = **n** = 2.
Rzucając 4 razy monetą tworzymy 4-wyrazowe ciągi, więc **k** = 4.
Liczba wyników jest równa liczbie $V_n^k = n^k = 2^4 = \mathbf{16}$
Odp. Można otrzymać 16 różnych wyników.

Przykład

Na ile różnych sposobów można wybrać 3 czekolady przez 2 osoby




Możliwości wyboru:

$\Omega =$ { (C1 C1) , (C1 C2), (C1 C3), (C2 C1), (C2 C2), (C2 C3), (C3 C1), (C3 C2) (C3 C3) }

$|\Omega| = 3^2 = 9$

$\boxed{W_n^k = n^k}$ n - ilość czekolad (mozliwości), k - ilość osób (obiektów)

### Obsadzanie wolnych miejsc

Jeśli pierwszy obiekt można umieścić na jednym z n miejsc, drugi na jednym z n-1 miejsc, trzeci na jednym z n-2 miejsc, a k -ty na jednym z n- (k-1) = n-k+1 miejsc, to liczba możliwych obsadzeń jest równa:

**n*(n-1)*(n-2)*…*(n-k+1)** – *jest* ***k*** *czynników*

Przykład

*Na ile sposobów można rozsadzić 5 osób na 6 wolnych miejscach?*

n=6, k = 5; 6*5*..(6-5+1) = 6*5*…*2 = 6*5*4*3*2

6*5*4*3*2

### Ustawianie się w kolejce

n różnych obiektów można ustawić jeden za drugim na

**n! = n*(n-1)*(n-2)*…*2*1 = 1*2*3*…(n-1)*n**

Przykład

*Na ile sposobów można ustawić w kolejce 4 osoby?*

4! = 1*2*3*4 = 24

Przykład

*Ile jest możliwych kolejności w jakiej dobiegnie na metę 5 zawodników?*

5! = 1*2*3*4*5 = 120

### Wykluczenie części możliwości

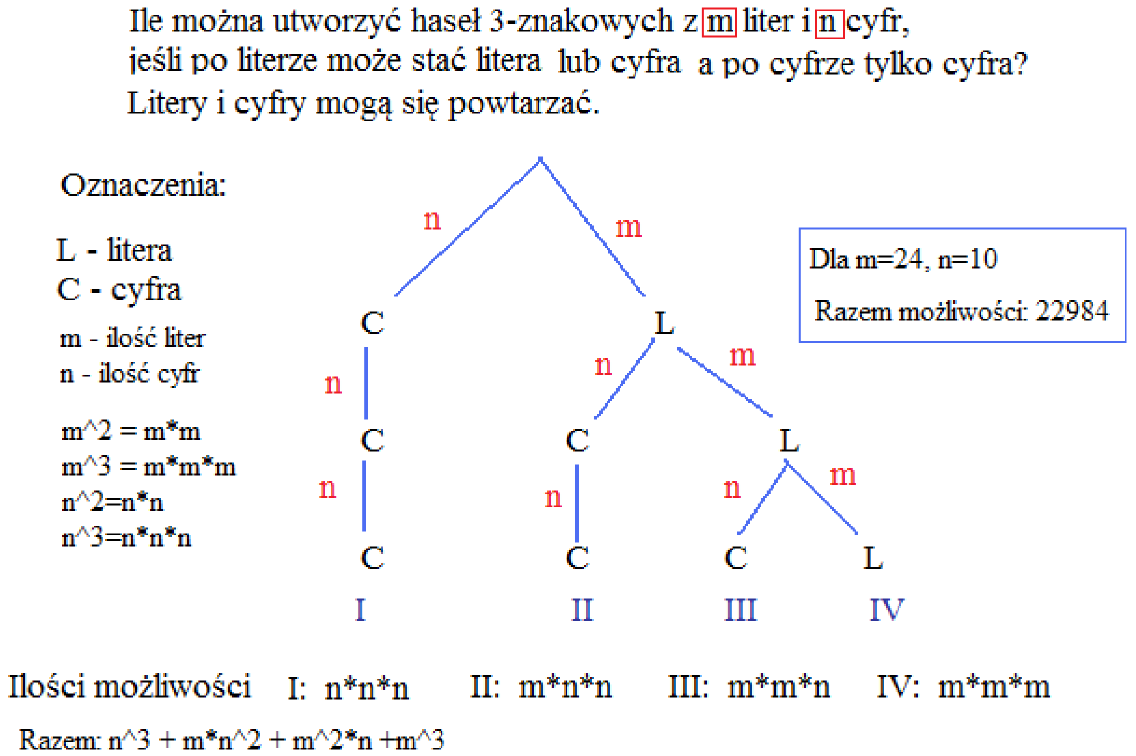
Czasem łatwiej obliczyć w ilu wypadkach warunek nie jest spełniony.
Spełnienie warunku oblicza się wtedy przez odjęcie od ilości wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych, ilości, w których warunek nie jest spełniony (zdarzeń przeciwnych).
$|A| = |\Omega| - |A'|$

<u>Przykład</u>
*Przy wyrzuceniu n razy monetą, ile jest przypadków m, w których orzeł wystąpił choć raz?*
*Ogółem jest $2^n$ możliwości (ciągów rzutu monetą).*
Wśród nich jest tylko jedna możliwość, w których orła nie ma ani razu.
Zatem takich, w których orzeł wystąpił co najmniej jeden raz jest: **$|A| = m = 2^n - 1$.**
Dla n = 3 → $m = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ *(Orła nie ma ani razu w ciągu {RRR} )*
Dla n = 6 → $m = 2^6 -1 = 64 -1 = 63$ *(Orła nie ma ani razu w ciągu {RRRRRR} )*
Dla n = 8 → $m = 2^6 -1 = 256 -1 = 255$ *(Orła nie ma ani razu w ciągu {RRRRRRRR} )*

### Drzewa stochastyczne – drzewa zdarzeń

W trudniejszych sytuacjach może się przydać narysowanie <u>drzewa</u>.
W drzewie tym wierzchołki rozgałęziają w zależności od rozwoju sytuacji.
Każdej krawędzi odpowiada liczba wskazująca na ile sposobów dany etap rozwoju sytuacji można zrealizować.
Mnoży się liczby możliwości rozmieszczone wzdłuż kolejnych krawędzi danej gałęzi by obliczyć na ile sposobów można zrealizować dany ciąg wydarzeń (tworzący daną gałąź drzewa).
Ilość sumaryczną wszystkich możliwości obliczamy sumując wyniki możliwości dla wszystkich gałęzi drzewa.

<u>Przykład:</u>
*Ile można utworzyć haseł trzyznakowych z m liter i n cyfr, jeśli po literze może stać litera lub cyfra, a po cyfrze zawsze tylko cyfra? Litery i cyfry mogą się powtarzać.*



Jeśli hasło 3-znakowe może składać się
z 2 liter i 2 cyfr to jest 32 możliwości.
z 10 liter i 2 cyfr to jest 1248 możliwości.
z 10 liter i 10 cyfr to jest 4000 możliwości.
z 24 liter i 10 cyfr to jest 22984 możliwości.
Z 26 liter i 10 cyfr to jest 27936 możliwości (alfabet łaciński).

## Kule w urnach

Jeżeli w **k** rozróżnialnych (np. ponumerowanych) urnach mamy rozmieścić
**n** jednakowych, nierozróżnialnych kul
to liczba możliwości rozmieszczenia wyraża się wzorami:

1) Jeśli <u>niektóre urny mogą zostać puste</u>
$\mathbf{C^{n}_{n+k-1} = \left(\frac{(n+k-1)}{n}\right)}$ = (n +k -1)! / (n!*(n+k-1 – n)! = (n+k-1)! / (k-1)!

2) Jeśli <u>w każdej urnie musi się znaleźć przynajmniej jedna kula</u>
$\mathbf{C^{k-1}_{n-1} = \left(\frac{(n-1)}{(k-1)}\right)}$ = (n-1)! / (n-1 – k+1)! = (n-1)! / (n-k)!

**Linki**
http://www.matemaks.pl/wstep-do-rachunku-prawdopodobienstwa.html
http://www.matematyka.net/index.php/teoria/rachunek-prawdopodobienstwa
http://marmaj.math.uni.lodz.pl/Pros_11_12/19_Elementy_rach._p-stwa.pdf
http://www.medianauka.pl/prawdopodobienstwo-wstep
http://www.matemaks.pl/wstep-do-rachunku-prawdopodobienstwa.html
http://www.matematyka.net/index.php/teoria/rachunek-prawdopodobienstwa
http://marmaj.math.uni.lodz.pl/Pros_11_12/19_Elementy_rach._p-stwa.pdf
http://www.medianauka.pl/prawdopodobienstwo-wstep

**<u>Literatura:</u>**
Matematyka w otaczającym nas świecie: Alicja Cewe, M. Walczak, M. Kruk, inni
Matematyka. Podręcznik dla szkół ponadgimnazjalnych. Nowa Era.
Matura 2014. Matematyka. Operon.
Małe Tablice. Matematyka. Adamantan.
Matematyka. SMS. ParkEdukacja