Geometria

Geometria (słowo to pochodzi z języka greckiego i oznacza mierzenie ziemi)
jest jednym z działów matematyki, którego przedmiotem jest badanie figur
geometrycznych i zależności między nimi.

Aksjomaty w geometrii:
• Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi nieskończenie wiele prostych
• Przez każde dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta
• Przez punkt nie leżący na prostej *l* przechodzi dokładnie jedna prosta *k* równoległą do prostej *l.*
Pojęcia pierwotne w geometrii, to: **punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń.**

FIGURY GEOMETRYCZNE
Figury geometryczne na płaszczyźnie noszą nazwę **figur płaskich**, w przestrzeni trójwymiarowej **brył geometrycznych**.
Badaniem właściwości figur płaskich zajmuje się dział geometrii zwany **planimetrią (geometrią płaszczyzny).**

Planimetria

Figury płaskie
LINIA:
Punkt poruszający się w przestrzeni kreśli linię,
POWIERZCHNIA:
Linia, kiedy porusza się w przestrzeni, zakreśla powierzchnię, np. koło pojazdu.
BRYŁA:
Przez ruch powierzchni możemy otrzymać ciało geometryczne, czyli bryłę.

Podstawowe figury geometryczne

Punkt, prosta, półprosta, odcinek.
Dodawanie i odejmowanie odcinków.

Punkt jest podstawową figurą geometryczną
Oznaczamy go kropką i podpisujemy wielkimi literami Np. **. P . A**

Prosta – linia o nieskończonym promieniu krzywizny, składająca się z nieskończenie wielu punktów.
Prosta - szczególny przypadek krzywej nieograniczonej z obydwu stron, o nieskończonym promieniu krzywizny w każdym punkcie
Jest to zbiór punktów opisanych następującym równaniem ogólnym Ax + By + C = 0, gdzie A i B nie mogą być równocześnie równe zeru.

Proste oznaczamy małymi literami alfabet, np. k, l, m.
Np. ______________ k
Zaznaczając na prostej k punkt A, mówimy, że punkt A należy do prostej k, zapisujemy A $\in$k
Zapis $C \notin a$ odczytujemy: punkt C **nie należy** do prostej a.

Przez jeden punkt można poprowadzić nieskończenie wiele prostych.
Przez dwa różne punkty można poprowadzić **tylko jedną prostą**.
Prostą przechodząca przez punkty A i B oznaczamy prosta AB.
A__________________________________B

Proste równoległe, prostopadle, przecinające się pod dowolnym kątem

Dwie proste na płaszczyźnie nazywamy równoległymi, jeśli pokrywają się lub nie mają punktów wspólnych.

Dwie proste są prostopadłe jeśli miary wszystkich kątów wierzchołkowych utworzonych przez te proste są równe.
Jeżeli prosta jest prostopadła do innej, to kąt stworzony przez ich przecięcie jest kątem prostym, który ma miarę 90° lub π/2 radianów.

Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie – 2 prostopadłe osie liczbowe o wspólnym początku.
Dowolne proste przecinające się pod kątem prostym są prostopadłe.

Płaszczyzna – płaska powierzchnia

Płaszczyzna, jedno z pojęć pierwotnych geometrii.
W niektórych innych aksjomatyzacjach geometrii, na przykład w geometrii analitycznej, płaszczyzna nie jest pojęciem pierwotnym, lecz zbiorem punktów.
Płaszczyznę można obrazować jako kartę papieru, powierzchnię stołu, czy płaskie pole, wyobrażając sobie je rozciągające się "w nieskończoność".
Płaszczyznę można zdefiniować jako miejsce geometryczne punktów przestrzeni równoodległych od wybranych dwóch punktów.
Płaszczyznę wyznaczają trzy, nie-współliniowe punkty albo prosta i punkt nie należący do prostej.

Każda prosta na płaszczyźnie dzieli ją na 2 części - **półpłaszczyzny**

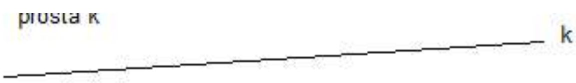
Figury definiowalne z jednostek podstawowych:

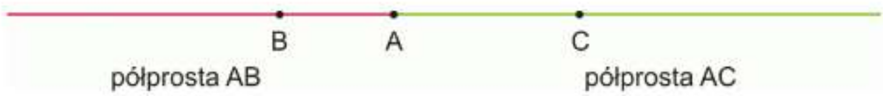
półprosta, odcinek, łamana, kąt płaski, wielokąt

Półprosta to część prostej ograniczona z jednej strony punktem, który jest jej początkiem.
Punkt na prostej dzieli ją na dwie półproste.

Odcinek to część prostej ograniczona z dwóch stron punktami, wraz z tymi punktami. Punkty te nazywamy końcami odcinka.

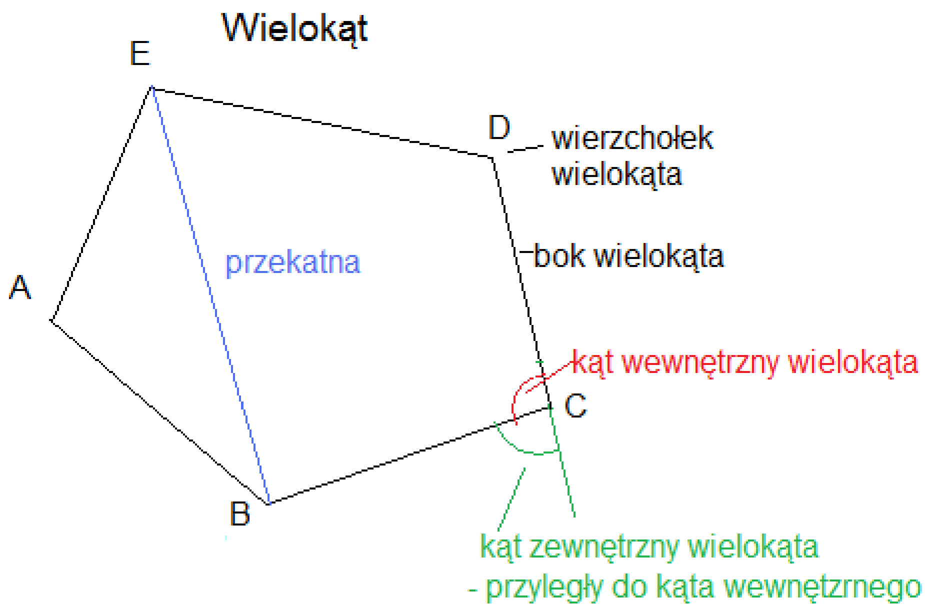
Odcinek o końcach C i D oznaczamy $\overline{CD}$ lub CD.





Łamana – <u>składa się z odcinków połączonych ze sobą tak, że koniec jednego jest początkiem drugiego</u>.
Łamane zwyczajne zamknięte, otwarte,
Łamana przecinająca się <u>zamknięta</u>, przecinająca się <u>otwarta</u>

Wielokąt – łamana zwyczajna zamknięta, wraz z wnętrzem.

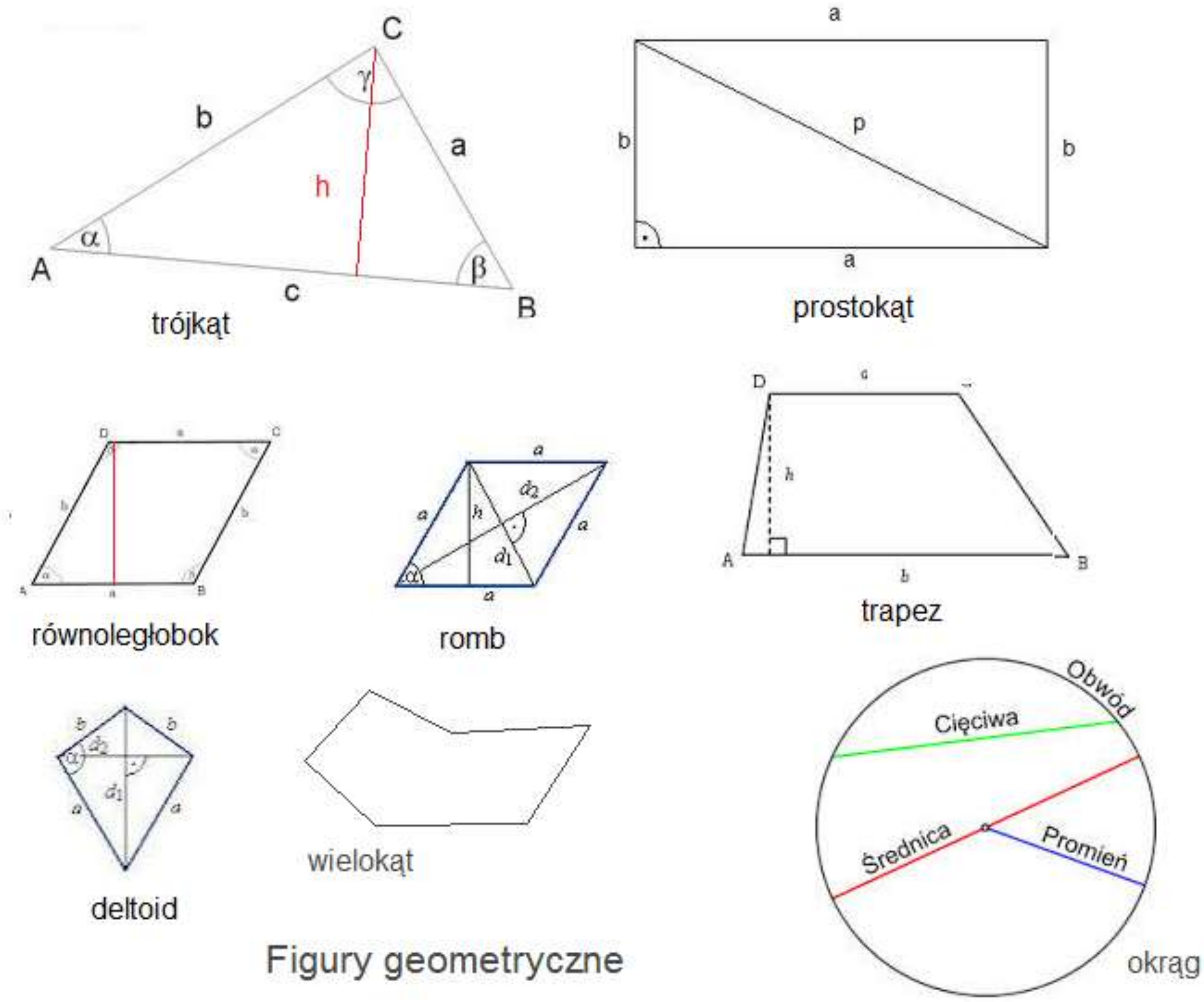


Ilość przekątnych: 1/2 * n * (n-3)

Suma kątów wewnętrznych: (n-2 * 180°

Wielokąt, który ma wszystkie boki tej samej długości i wszystkie kąty tej samej miary, nazywamy **wielokątem foremnym**.

Figury geometryczne



Figury podstawowe, pola i obwody

Trójkąt – wielokąt o trzech bokach.
Trójkąt to najmniejsza figura wypukła i domknięta, zawierająca pewne trzy ustalone i niewspółliniowe punkty płaszczyzny.
Trójkąty: dowolny (różnoboczny), równoramienny, równoboczny, prostokątny.
Suma długości 2 boków trójkąta jest większa od trzeciego boku.
Każdy trójkąt jest wielokątem wypukłym. Ma 3 kąty, których suma = 180 stopni.
Obwód trójkąta: **Ob. = a + b + c**
Pole trójkąta **P = ½ *a*h**

Czworokąty: dowolny, prostokąt, kwadrat, równoległobok, romb, trapez, trapez równoramienny, trapez prostokątny, deltoid.
Wielokąty foremne: pięciokąt, sześciokąt, ośmiokąt …

Prostokąt – czworokąt, który ma wszystkie kąty proste.
Prostokąt ma długość, szerokość . W prostokącie można narysować 2 przekątne.
Obwód prostokąta: **Ob. = 2a + 2b = 2*(a + b)**

Pole prostokąta: **P = a * b**

Kwadrat – prostokąt, który ma wszystkie boki równe. Przekątne kwadratu przecinają się pod kątem prostym.

Ob. = 4a **P = a * a = a^2**

Równoległobok – czworokąt, który ma 2 pary boków równoległych.

Ob. = 2a + 2b = 2 (a + b) **P = a * h**

Romb – równoległobok o bokach równej długości. Przekątne przecinają się pod katem prostym i dzielą się na połowy.

Ob. = 4a **P = a*h = ½ d1 * d2** gdzie d1, d2 – przekątne rombu

Trapez – czworokąt, który ma parę boków równoległych

Ob. = a + b + c + d **P = ½ * (a + b) * h**

Okrąg – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny równo oddalonych od pewnego ustalonego punktu, zwanego środkiem okręgu.

Promień okręgu – odcinek łączący dowolny punkt okręgu z jego środkiem. Oznaczamy go **r** lub **R**.

Cięciwa okręgu – odcinek łączący 2 różne punkty okręgu.

Średnica okręgu – cięciwa przechodząca przez środek okręgu. Jest to najdłuższa cięciwa. Oznaczamy przez **d**.

Długość średnicy jest równa podwojonemu promieniowi: **d = 2r**

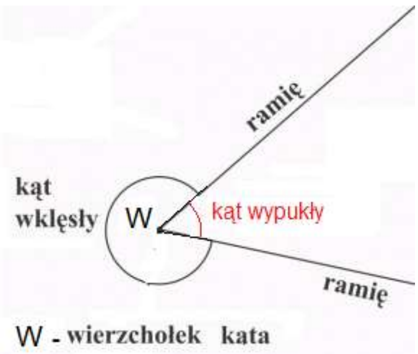
Koło – okrąg wraz z jego wnętrzem.

Ob. = 2πr = π*d – obwód **P = πr^2** - pole

Kąty

Kąt płaski, część płaszczyzny ograniczona dwoma półprostymi (ramionami kąta) wychodzącymi z jednego punktu (wierzchołka kąta)

Kąt płaski – część płaszczyzny wyznaczone przez 2 półproste.



Rodzaje kąta:

zerowy - kąt utworzony przez dwie półproste pokrywające się , a tym samym im równy. Miara kąta zerowego jest równa 0 [rad] =0°.

ostry - α < 90° - kąt o mierze większej od 0 [rad] =0°, lecz mniejszej od π/2 [rad] =90°.

prosty - α = 90° - kąt przystający do swojego kąta przyległego. Miara kąta prostego wynosi **π/2** [rad] =**90**°.

rozwarty - 90° < α < 180°- kąt o mierze większej od π/2 [rad] =90°, lecz mniejszej od π [rad]=180°.

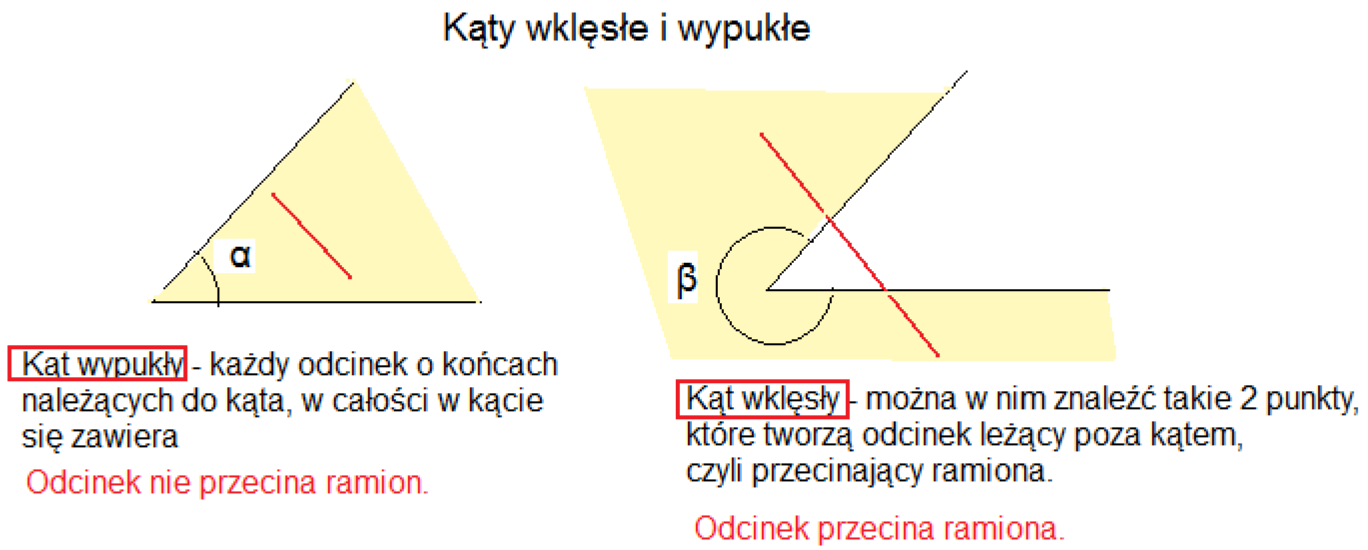
półpełny - α = 180° - każdy z dwu kątów utworzonych przez dwie półproste uzupełniające się do prostej. Miara kąta półpełnego wynosi π [rad]=180°.

pełny - α =360° - kąt utworzony przez dwie półproste pokrywające się i równy całej płaszczyźnie. Miara kąta pełnego wynosi 2π [rad]=360°.

wypukły - α <= 180°- kąt, który jest figurą wypukłą. Miara takiego kąta jest mniejsza lub równa π [rad]=180° albo równa 2π [rad]=360°.

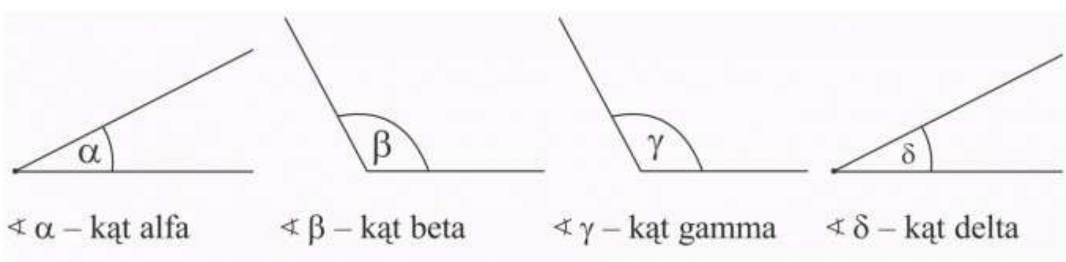
wklęsły - 180° < α < 360° - kąt, który nie jest figurą wypukłą. Miara takiego kąta jest większa niż π [rad=180°], lecz mniejsza niż 2π [rad]=360°.

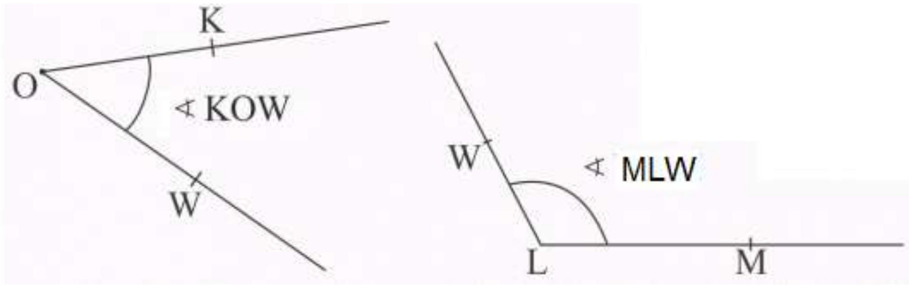
Kąty wypukłe < 180^0 Kąty **wklęsłe > 180^0 i < 360^0**



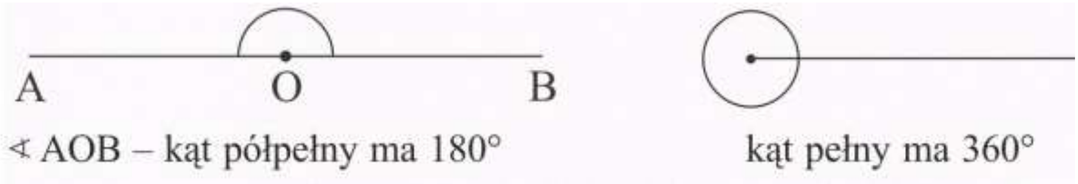
°

Kąty oznaczamy:

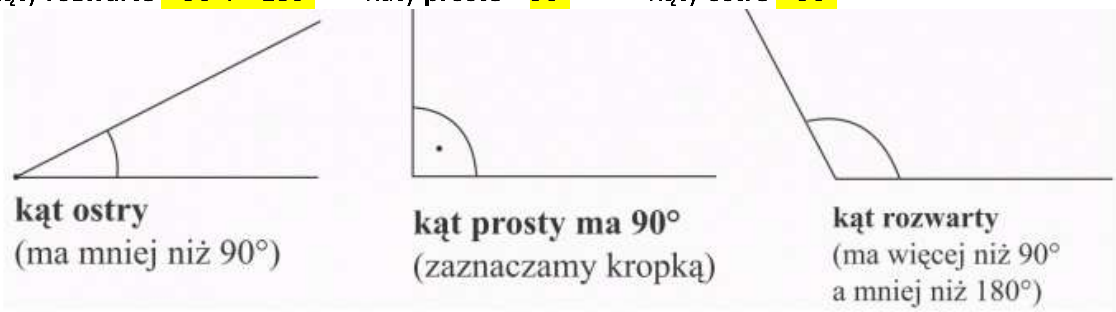




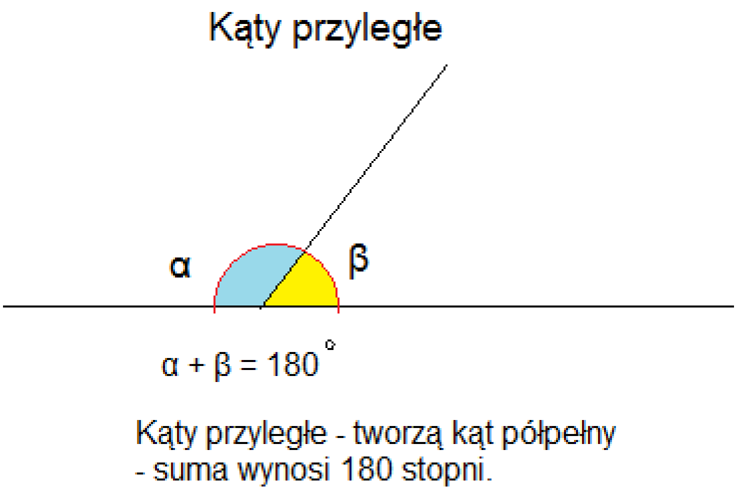
Kąty pełne – 360^0 Kąty półpełne 180^0



Kąty **rozwarte** > 90^0 i < 180^0 Katy **proste** = 90^0 Kąty **ostre** < 90^0



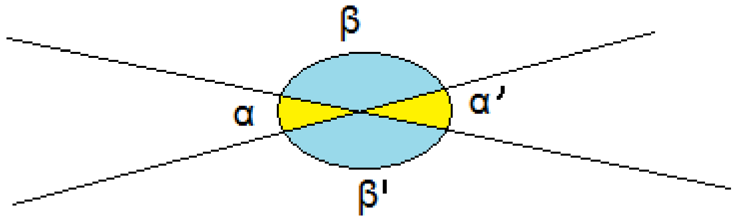
Kąty przyległe, kąty wierzchołkowe



Kąty przyległe – kąty, które maja wspólny wierzchołek, jedno wspólne ramię, a pozostałe ramiona tworzą prostą.
Suma kątów przyległych wynosi 180°.

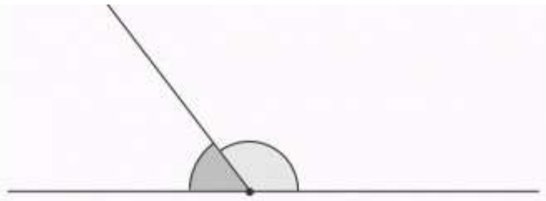
Kąty wierzchołkowe – kąty o równych miarach, mają wspólny wierzchołek, a ich ramiona wzajemnie się przedłużają
Dwie pary kątów wierzchołkowych powstają w wyniku przecięcia dwóch prostych:

Kąty wierzchołkowe: α i α' oraz β i β'

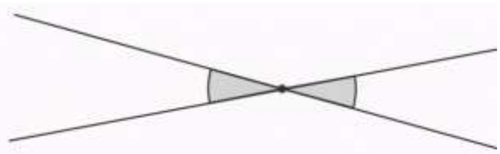


mają równe miary

Dwie pary kątów wierzchołkowych
α i α' oraz β i β'
powstają w wyniku przecięcia dwóch prostych:

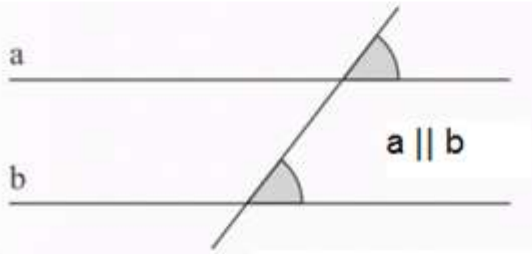


kąty przyległe
Suma miar kątów przyległych wynosi 180°.



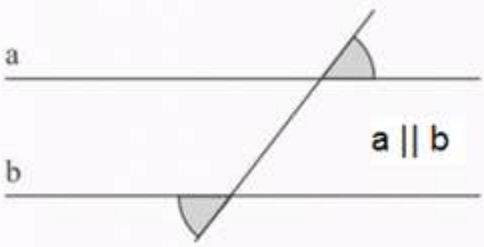
kąty wierzchołkowe
Kąty wierzchołkowe są równe.

Kąty odpowiadające



kąty odpowiadające
Kąty odpowiadajace są równe, jeżeli a ll b

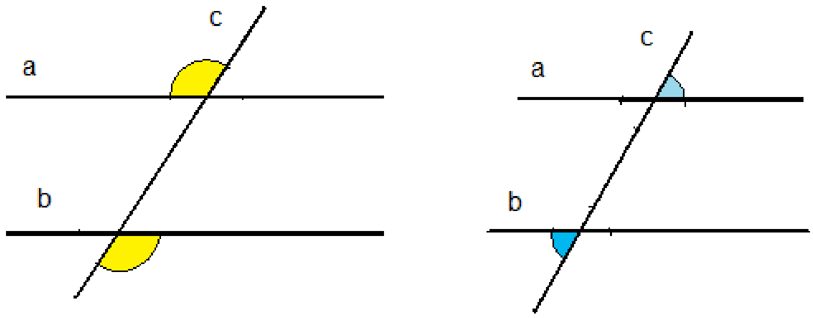
Kąty naprzemianległe



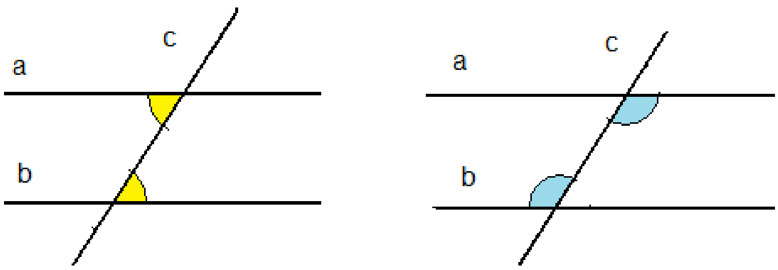
kąty naprzemianległe (jeden leży nad prostą, drugi pod prostą)

Kąty naprzemianległe mają równe miary (jeśli a ll b).

Kąty naprzemianległe wewnętrznie i zewnętrznie



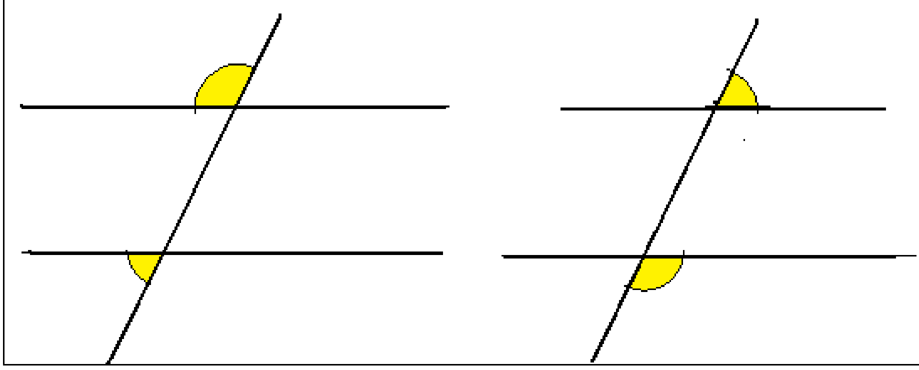
Kąty naprzemianległe zewnętrznie



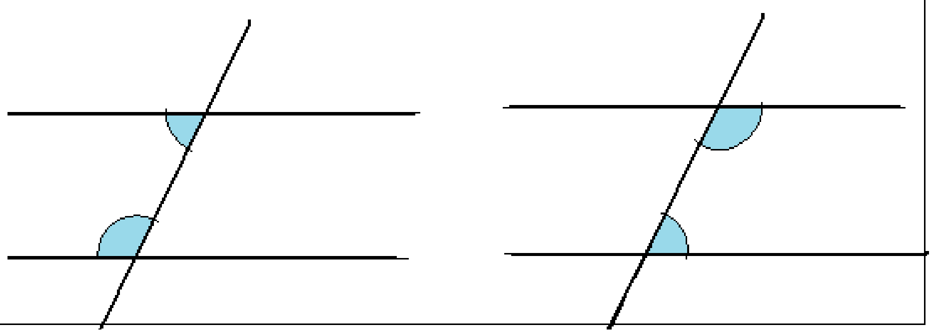
Kąty naprzemianległe wewnętrznie

Katy jednostronne zewnętrznie i wewnętrznie

Kąty jednostronne zewnętrznie

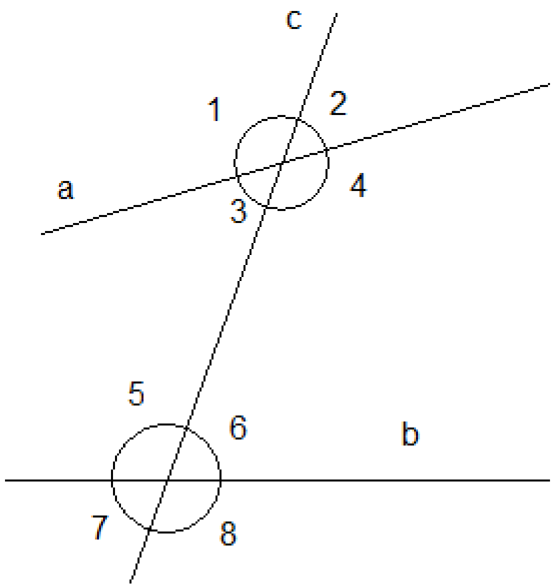


Katy jednostronne wewnętrzne



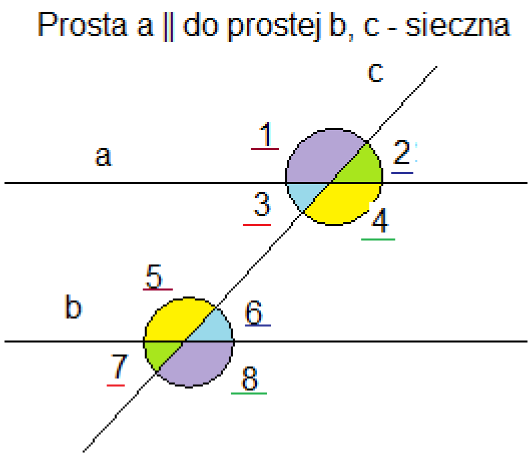
Kąty naprzemianległe i odpowiadające

Jeżeli dwie proste, przetniemy trzecią, którą nazywamy wówczas prostą sieczną, to utworzy się 8 kątów, mających następujące nazwy:



Kąty **3** i **6** oraz **4** i **5** - kąty *naprzemianległe wewnętrzne*
Kąty **1** i **8** oraz **2** i **7** - kąty *naprzemianległe zewnętrzne*
Kąty **1** i **5**, **3** i **7**, **2** i **6**, **4** i **8** - kąty *odpowiadające*
Kąty **3** i **5**, **4** i **6** - kąty *jednostronne wewnętrzne*
Kąty **3** i **5**, **4** i **6** - kąty *jednostronne wewnętrzne*

Pomiędzy kątami, które tworzy sieczna z 2 prostymi równoległymi są pewne zależności:



Zależności między kątami

Kąty naprzemianległe wewnętrznie:
|<5| = |<4 |<3| = |<6|

Kąty naprzemianległe zewnętrznie
|<7| = |<2| |<8| = |<1|

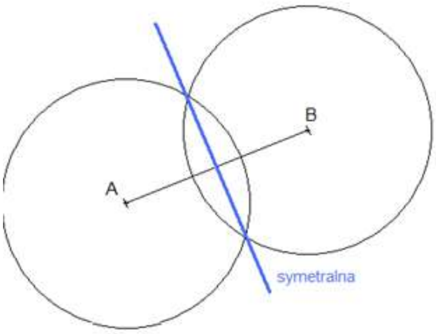
Kąty odpowiadające:
|<7| = |<3| |<5| = |<1|
|<8| =|<4| |<6| = |<2|

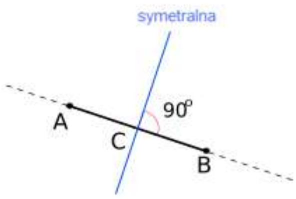
Symetralna odcinka

Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka i przechodzącą przez środek odcinka.
Każdy punkt symetralnej odcinka jest **równo oddalony** od końców odcinka.

Symetralna jest jedną z dwóch osi symetrii odcinka.

Konstrukcja symetralnej odcinka oraz wyznaczenie środka odcinka **AB**





Aby skonstruować cyrklem i linijką symetralną danego odcinka AB należy:

1. Zakreślić cyrklem dwa okręgi o środkach w punktach A oraz B o identycznym promieniu większym od połowy długości odcinka AB.
   Okręgi te przetną się w dwóch różnych punktach.
2. Poprowadzić prostą przez wyznaczone punkty przecięcia okręgów.

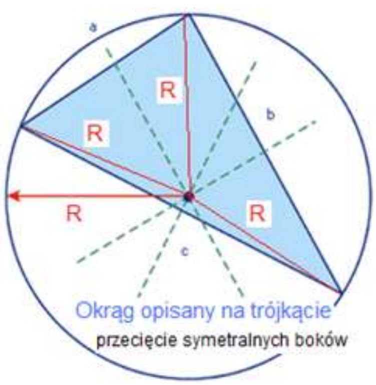
Wyznaczona prosta jest szukaną symetralną.

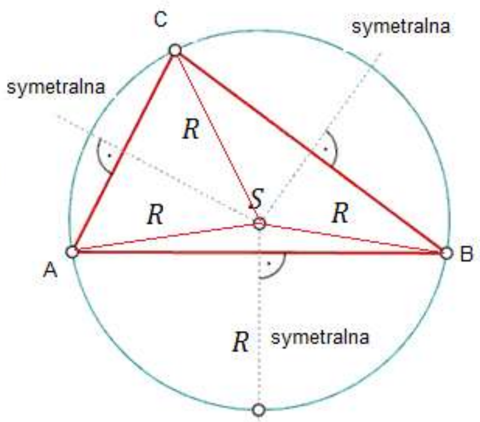
Powyższa konstrukcja jest również stosowana do wyznaczenia środka odcinka ponieważ punkt przecięcia symetralnej z odcinkiem jest właśnie tym środkiem.

W każdym trójkącie symetralne wszystkich boków przecinają się w jednym punkcie będącym środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

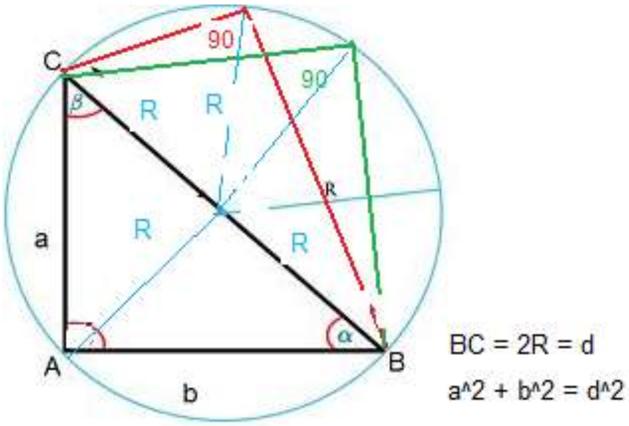
Okrąg opisany na trójkącie

Środek okręgu opisanego na trójkącie, znajduje się w punkcie przecięcia **symetralnych boków trójkąta**
(symetralna to prosta dzieląca odcinek na pół i przecinająca go pod kątem prostym).





ASC, ASB, BSC - trójkąty równoramienne



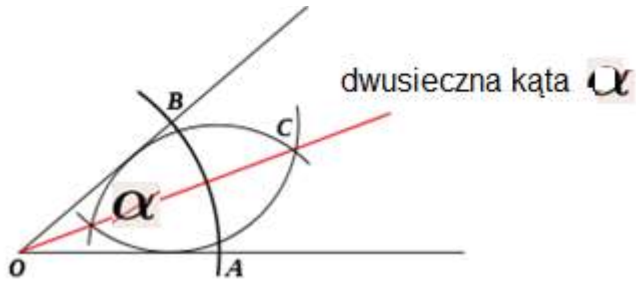
Okrąg opisany na trójkącie prostokątnym
Trójkąt prostokatny wpisany w okrąg oparty na średnicy

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży na środku przeciwprostokątnej.
Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie.

Dwusieczna kąta

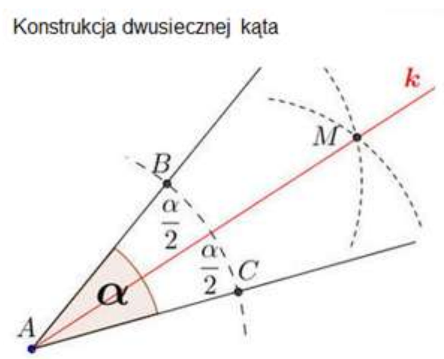
Dwusieczna kąta – półprosta, o początku w wierzchołku kąta, która dzieli ten kąt na dwa kąty przystające.

Dwusieczna jest zbiorem punktów równo odległych od ramion kąta i zawarta jest w jego osi symetrii.



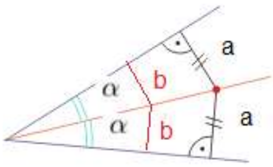
Konstrukcja dwusiecznej kąta AOB

Aby narysować dwusieczną, należy:
1. Z wierzchołka *O* danego kąta dowolnym promieniem zakreślić łuk, który przetnie ramiona kąta w punktach *A*, *B*
2. Z punktów *A* i *B* o tym samym co poprzednio promieniu (lub innym jednakowym) zakreślić łuki, które przetną się w punkcie *C*
3. Półprosta *OC* jest dwusieczną



Narysuj kąt α o wierzchołku A. Przy pomocy cyrkla wyznacz na jego ramionach punkty B i C (przecięcie okręgu o promieniu BC z ramionami kata).
Z punktów B i C o jednakowym rozstawie (może być jak rozstaw poprzedni) zaznacz przecinające się łuki w punkcie M.
Z punktu A przez punkt M narysuj półprostą k, która jest dwusieczną kąta α – dzieli kąt na połowy.

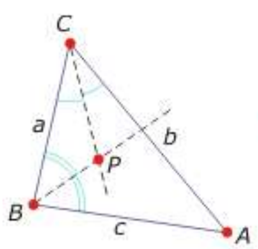
Definicja dwusiecznej:
Zbiór punktów płaszczyzny/przestrzeni leżących w równej odległości od ramion kąta płaskiego / ścian kąta dwuściennego.

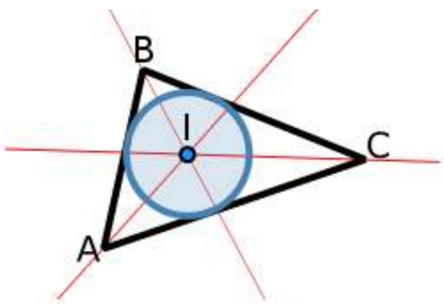


Własności:

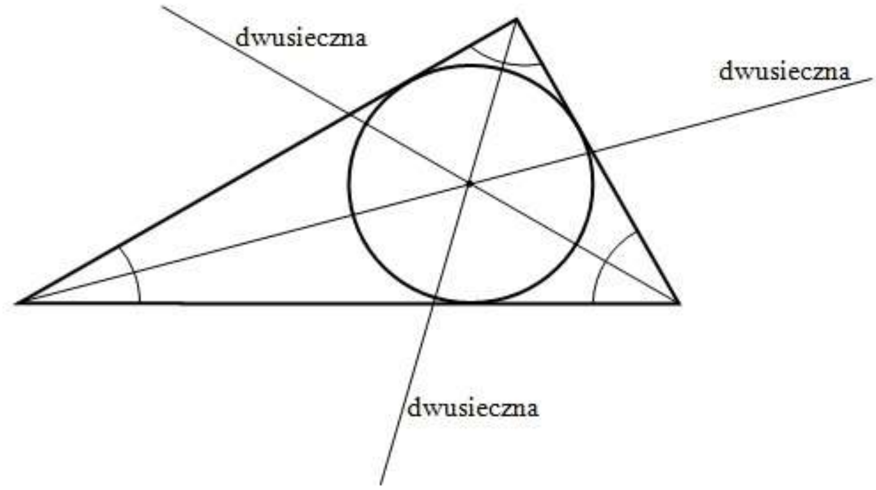
- Dwusieczna kąta płaskiego to prosta (dla kąta dwuściennego - płaszczyzna) przechodząca przez wierzchołek kąta
(dla kąta dwuściennego przez krawędź) i dzielącą go na dwa kąty przystające (stąd nazwa: *dwu-sieczna* = krojąca na połowy).
- Dwusieczna jest jedyną osią symetrii kąta.
- W każdym kącie płaskim dwusieczną można skonstruować cyrklem i linijką.

Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie - w środku okręgu wpisanego w trójkąt.

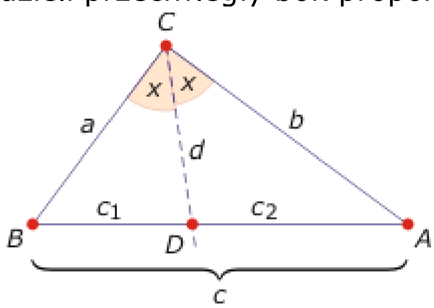




Środek okręgu wpisanego w trójkąt
- przecięcie dwusiecznych kątów trójkąta



Twierdzenie o dwusiecznej - dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do długości pozostałych boków.



Dowód. Stosunek pól trójkątów o równej wysokości jest równy stosunkowi długości ich podstaw, na które tę wysokość opuszczono.

P2/P1 = c2*h/ c1*h = c2*h * h/c1 = c2/c1 = b/a

Trójkąty:

Różnoboczne - różne boki

Równoramienne – obliczanie kąta miedzy ramionami lub kątów przy podstawie

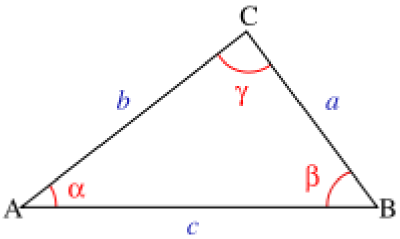
Równoboczne – równe boki i kąty

Ostrokątne – kąty mniejsze od 90 stopni

rozwartokątne – jeden kąt rozwarty

prostokątne – jeden kąt prosty

http://pl.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%B3jk%C4%85t

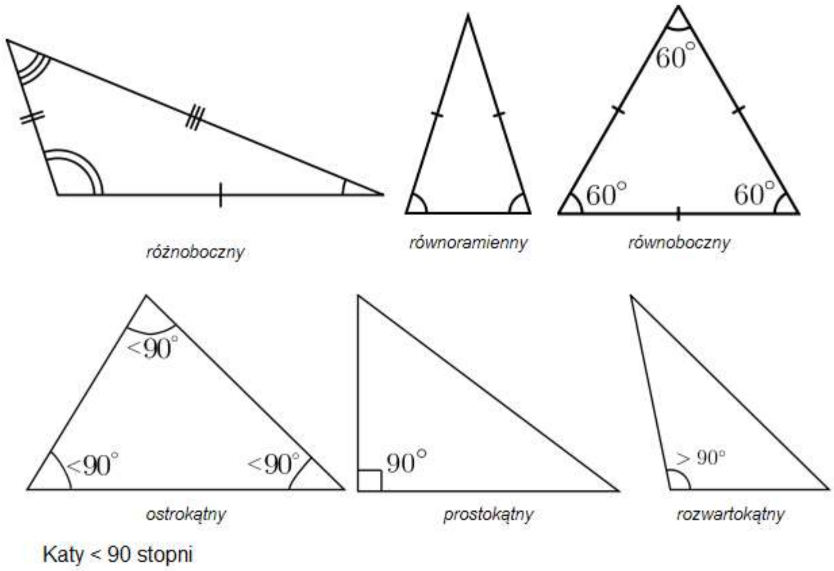


A, *B*, *C* – wierzchołki
a, *b*, *c* – boki
α, *β*, *γ* – kąty

Trójkąty można dzielić ze względu na długości ich boków oraz ze względu na miary ich kątów.

Podział trójkątów ze względu na boki:

- **trójkąt różnoboczny** ma każdy bok innej długości;
- **trójkąt równoramienny** ma przynajmniej dwa boki tej samej długości;
- **trójkąt równoboczny** ma wszystkie trzy boki tej samej długości; i równe kąty



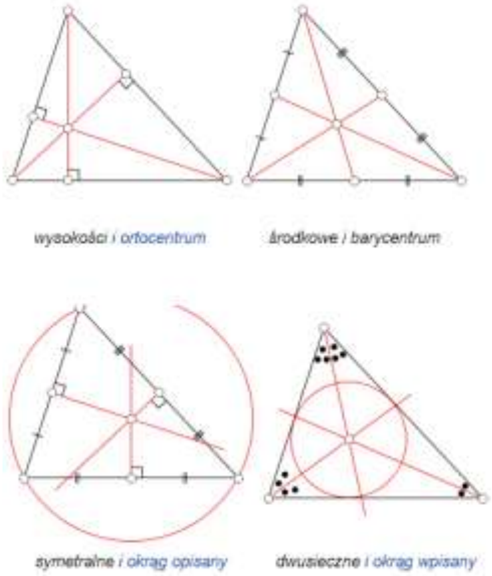
Wysokość trójkąta to prosta zawierająca jego wierzchołek i prostopadła do prostej zawierającej przeciwległy bok

Środkowa trójkąta to prosta zawierająca wierzchołek trójkąta i środek przeciwległego boku. Każdy trójkąt ma trzy środkowe, które przecinają się w jednym punkcie, będącym środkiem geometrycznym (barycentrum) trójkąta.
Punkt ten dzieli każdą ze środkowych na dwie części, przy czym odcinek łączący barycentrum z wierzchołkiem jest dwa razy dłuższy od odcinka
łączącego barycentrum ze środkiem boku.

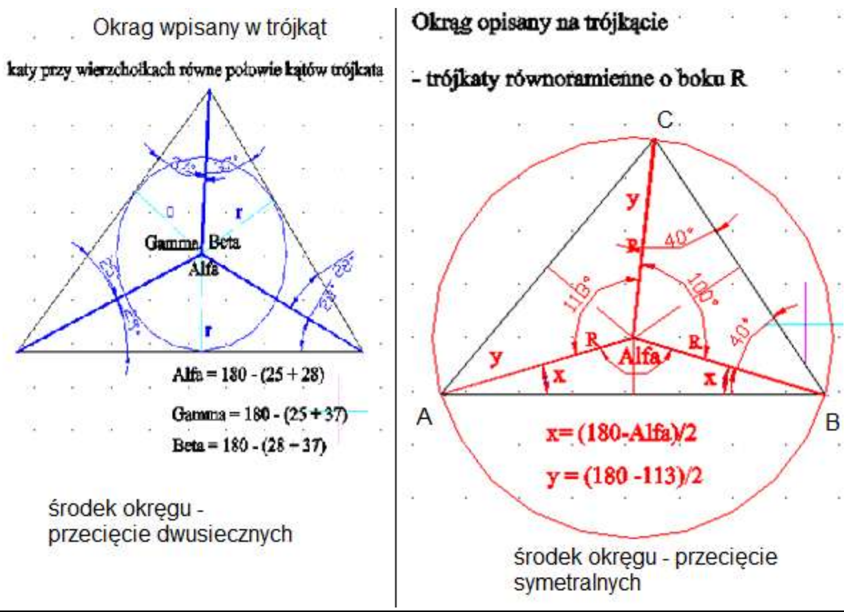
Symetralna boku trójkąta to prosta prostopadła do tego boku i przechodząca przez jego środek.

Każdy trójkąt ma trzy symetralne boków, przecinające się w punkcie będącym środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

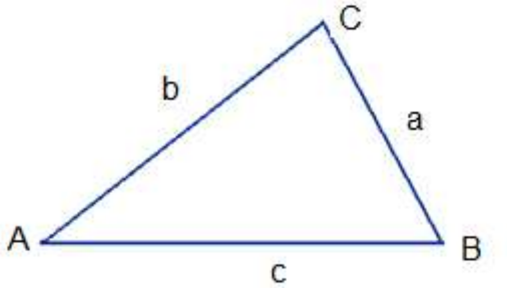


Okrąg opisany na trójkącie i wpisany w trójkąt



Trójkąt różnoboczny

Trójkąt, którego każdy bok jest innej długości, to trójkąt różnoboczny.



Suma długości dwóch boków trójkąta jest większa od długości trzeciego boku.

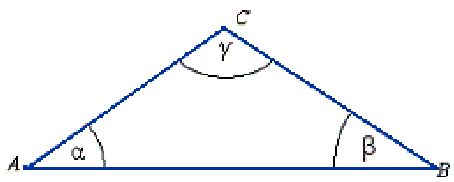
$|AB| < |AC| + |BC|$, $c < a + b$

$|AC| < |AB| + |BC|$, $b < c + a$

$|BC| < |AB| + |AC|$. $a < c + b$

Trójkąt równoramienny

Trójkąt, którego *dwa boki są równej długości* nazywamy **trójkątem równoramiennym**.



|AC| = |CB α = β.

Boki równe nazywamy ramionami, trzeci bok nazywamy podstawą.

W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają tę samą miarę. **α = β**.

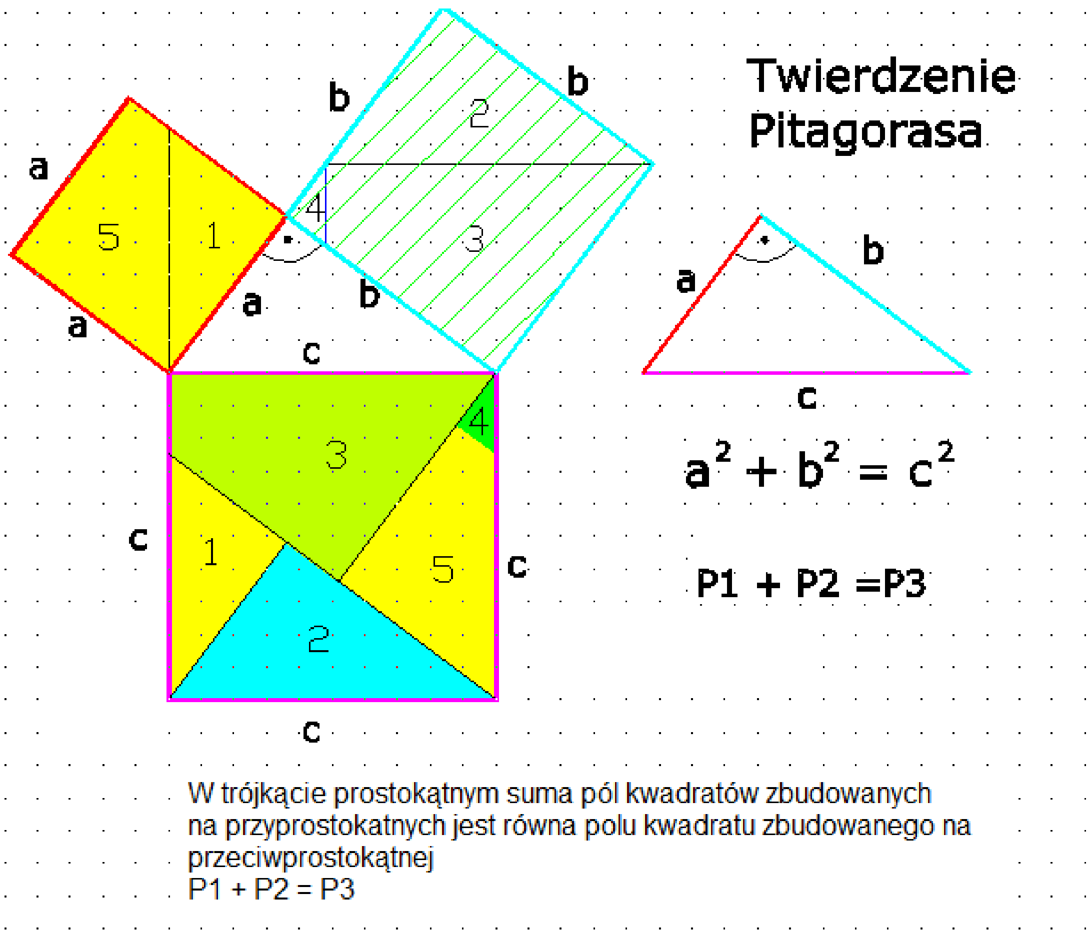
Jeżeli trójkąt jest równoramienny, to kąty przylegające do jego podstawy są równe.

Trójkąt równoramienny posiada co najmniej jedną oś symetrii przecinającą podstawę w połowie długości oraz przechodzącą przez wierzchołek kąta łączącego ramiona.

W trójkącie równoramiennym dwie wysokości są równe.

Trzecia wysokość opuszczona na podstawę dzieli ją na dwie równe części, a półprosta, w której leży ta wysokość, dzieli kąt między ramionami trójkąta na dwa kąty o równych miarach.

Trójkąt prostokątny, twierdzenie Pitagorasa



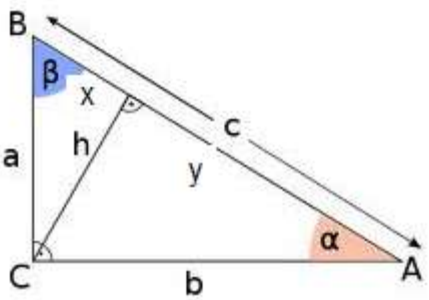
Twierdzenie Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = c^2$

a, b – długości przyprostokątnych, c – długość przeciwprostokątnej
Jeżeli trójkąt jest prostokątny to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.

Długości boków trójkąta prostokątnego na podstawie twierdzenie Pitagorasa:

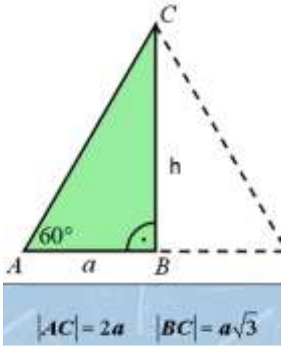
c = $\sqrt{a^2 + b^2}$ a = $\sqrt{c^2 - b^2}$ b = $\sqrt{c^2 - a^2}$



$a^2 + b^2 = c^2$

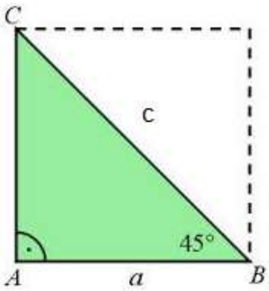
h = $\sqrt{xy}$

Trójkąt prostokątny z kątami 90° 30° i 60° oraz 90°, 45°, 45°



$$|BC| = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

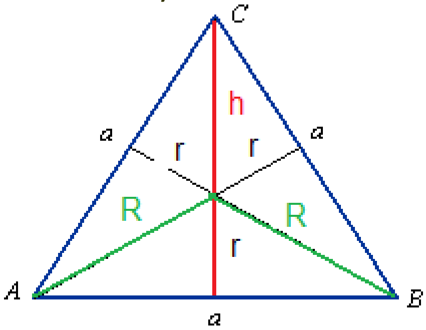
h = a √3



c = a√2

Trójkąt równoboczny, wysokość trójkąta równobocznego

Trójkąt, który ma wszystkie boki równej długości nazywamy trójkątem równobocznym.



$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Wysokość trójkąta równobocznego:

R = 2/3 * h **R=a √3 / 3**
r = 1/3 *h **r= a*√3 / 6**
R + r = h

$P = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ **Pole trójkąta równobocznego:**

Trójkąt równoboczny o boku a,
wysokości h
promieniu okręgu opisanego R
promieniu okręgu wpisanego r

Trójkąt równoboczny to szczególny trójkąt, który posiada następujące własności:
- wszystkie kąty są równe i mają miarę **60°**,

- wysokość trójkąta równobocznego **h = a*√3 / 2**
- wysokość trójkąta równobocznego dzieli go na dwa przystające trójkąty prostokątne,
- wysokości trójkąta i dwusieczne jego kątów zawierają się w symetralnych boków tego trójkąta,
- wysokości trójkąta równobocznego dzielą się w stosunku **1 :2,**
- punkt przecięcia wysokości jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt oraz środkiem okręgu opisanego na trójkącie,
- promień okręgu wpisanego w trójkąt **r=1/3 *h** lub **r = a*√3 / 6**
- promień okręgu opisanego na trójkącie **R=2/3 h** lub **R = a √3 / 3**
- pole **trójkąta P=1/2 a*h** lub **P=a^2 * √3 / 4.**

Wysokość trójkąta równobocznego: **h =** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

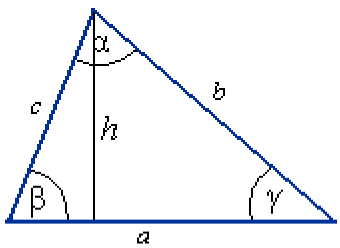
Pole trójkąta równobocznego: P $= a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

R + r = h

Podstawowe wzory dotyczące trójkąta dowolnego:

Obwód: Obw. = a + b + c
Pole: P = ½ a*h

Dla dowolnego trójkąta zachodzi:
P - pole trójkąta, Ob - obwód trójkąta,

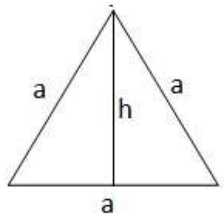


$|a - b| < c < a + b$,
$\alpha + \beta + \delta = 180°$,

$Ob = a + b + c$,
$P = \frac{1}{2}ah$
$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$,
$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{1}{2}\left(a+b+c\right)$, (wzór Herona)

$R = \frac{abc}{4P}$, (promień okręgu opisanego),
$r = \frac{P}{p}$, (promień okręgu wpisanego).

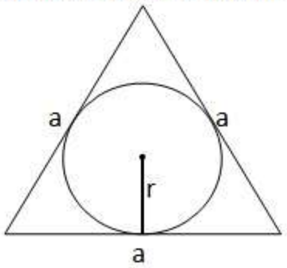
Trójkąt równoboczny



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

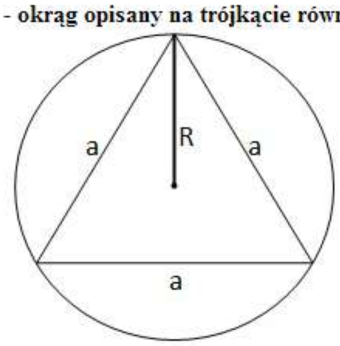
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

- okrąg wpisany w trójkąt równoboczny



$$\mathbf{r = \frac{1}{3}h}$$

- okrąg opisany na trójkącie równobocznym



$$\mathbf{R = \frac{2}{3}h}$$

Suma promieni okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie równobocznym jest równa wysokości tego trójkąta.

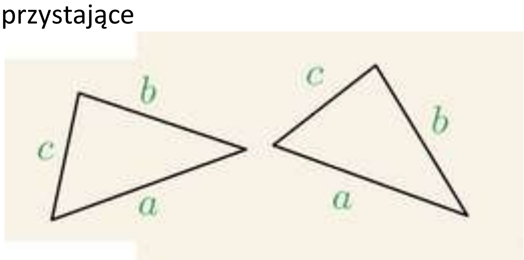
$$\mathbf{R + r = h}$$

Cechy przystawania trójkątów

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli ich odpowiednie boki i kąty są równe.

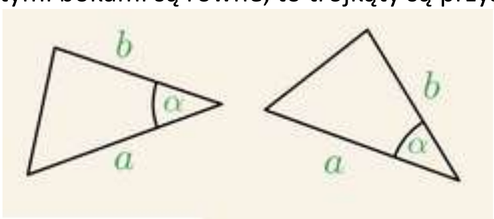
Cecha bok –bok -bok (**bbb)**

Jeżeli boki jednego trójkąta są równe odpowiednim bokom drugiego trójkąta to trójkąty są przystające



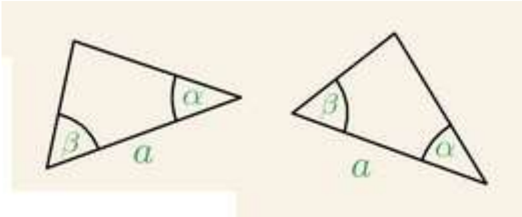
Cecha bok – kąt – bok (**bkb)**

Jeżeli 2 boki jednego trójkąta są równe odpowiednim bokom drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty są przystające.



Cecha kąt – bok – kąt (**kbk**)

Jeżeli bok jednego trójkąt jest równy bokowi drugiego trójkąta i kąty przylegające do tego boku są równe odpowiednim kątom przylegającym do odpowiedniego boku
drugiego trójkąta – to trójkąty są przystające.

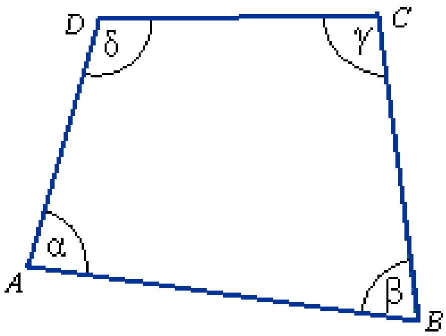


Boki trójkąta
Trzy odcinki są bokami trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy suma dowolnych 2 boków jest większa od boku trzeciego

Boki a kąty trójkąta
Naprzeciw dłuższego boku trójkąta leży większy kąt i na odwrót – naprzeciw większego kąta leży większy bok.

Czworokąty:
różnoboczne,
trapezy,
równoległoboki,
prostokąty,
romby,
kwadraty,
deltoidy

Czworokąt to wielokąt o czterech bokach i o czterech kątach wewnętrznych.
Czworokąt to płaszczyzna ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą złożoną z czterech odcinków.



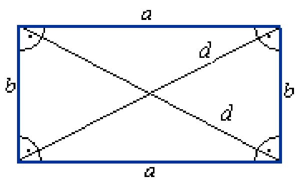
punkty *A*, *B*, *C*, *D*, to wierzchołki czworokąta,
odcinki *AB*, *BC*, *CD*, *DA* to boki czworokąta,
kąty α, β, γ, δ to kąty wewnętrzne czworokąta.
Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360°.

$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.}$

Czworokąt jest figurą **wypukłą** wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego kąty wewnętrzne są kątami wypukłymi.
Czworokąt jest figurą **wklęsłą** wówczas, gdy jeden z jego kątów wewnętrznych jest kątem wklęsłym.

Prostokąt

Prostokątem nazywamy czworokąt, którego wszystkie kąty wewnętrzne to kąty proste.



Ob = 2a + 2b - obwód

P = a · b - pole

$\mathbf{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$- przekątna

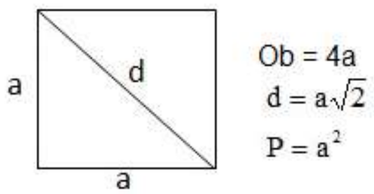
Własności **prostokąta**

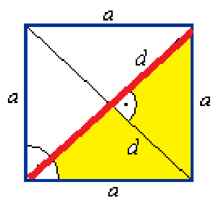
- przeciwległe boki są równe i równoległe,
- sąsiednie boki są prostopadłe,
- każdy z kątów jest kątem prostym,
- przekątne są równe i dzielą się na połowy,
- punkt przecięcia przekątnych jest środkiem okręgu opisanego na prostokącie,
- przekątna dzieli prostokąt na dwa przystające trójkąty prostokątne.

Kwadrat

Kwadratem nazywamy taki czworokąt, który ma wszystkie boki i kąty równe.

Kwadrat





Przekątna kwadratu, wysokość trójkąta prostokątnego równobocznego

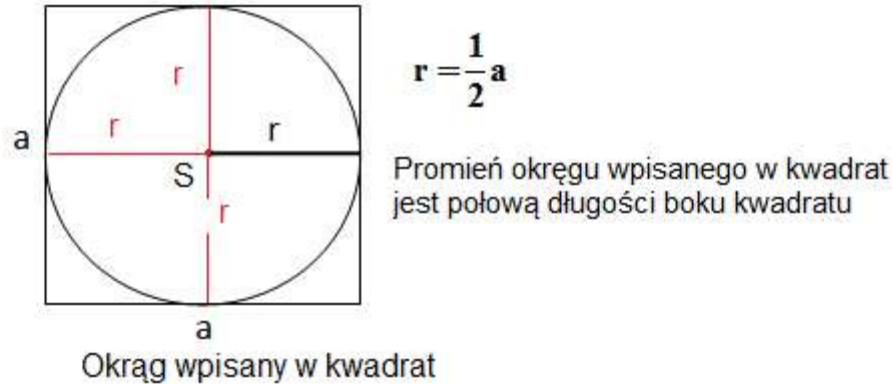
$\mathbf{d^2 = a^2 + a^2}$

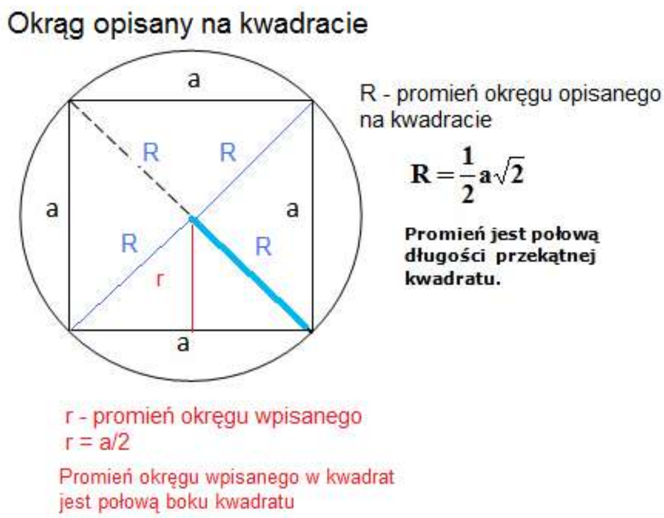
$\mathbf{d = a\sqrt{2}}$

Własności kwadratu

- wszystkie boki są równe,
- przeciwległe boki są równoległe,
- wszystkie kąty są proste,
- przekątne są równej długości,
- przekątne dzielą się na połowę pod kątem prostym,
- przekątne zawierają się w dwusiecznych kątów kwadratu,
- przekątna dzieli prostokąt na dwa przystające trójkąty prostokątne,
- punkt przecięcia się przekątnych jest środkiem symetrii kwadratu,
- punkt przecięcia przekątnych wyznacza środek okręgu wpisanego i opisanego na kwadracie.

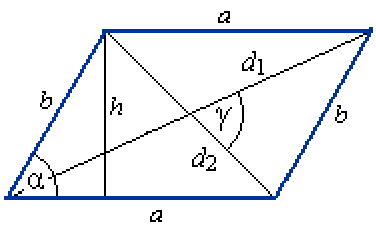
Okrąg wpisany w kwadrat





Równoległobok

Równoległobokiem nazywamy czworokąt, w którym przeciwległe boki są parami równe i równoległe. Równoległobok jest szczególnym przypadkiem trapezu równoramiennego - o dwóch parach boków równoległych.

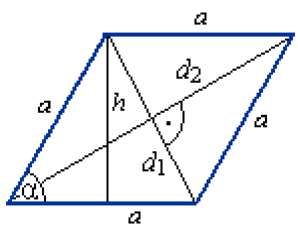


Ob = 2a + 2b
P = a · h = a · b · sinα
P= ½ * d_1 * d_2 ·sinγ

Własności równoległoboku:
- przeciwległe boki są równoległe,
- przeciwległe boki są tej samej długości,
- przekątne dzielą się na połowy,
- przeciwległe kąty są równe,
- suma dwóch sąsiednich kątów równa jest 180°,
- przekątne dzielą się na połowy i wyznaczają punkt, będący środkiem ciężkości równoległoboku
- przekątna dzieli równoległobok na dwa przystające trójkąty
- na równoległoboku, który nie jest prostokątem, nie możne opisać okręgu i nie można też w niego wpisać okrąg.

Romb

Rombem nazywamy czworokąt, którego wszystkie boki są równe.
Jest to szczególny przypadek równoległoboku.

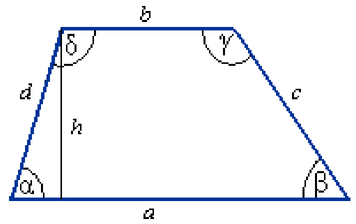


Ob = 4a
P = a · h = a^2 · sinα
P= ½ * d_1*·d_2

Własności rombu
- wszystkie boki są równe,
- przeciwległe boki są równoległe,
- suma miar dwóch kątów sąsiednich wynosi 180°,
- przekątne zawierają się w dwusiecznych kątów,
- przekątne rombu dzielą się na połowy pod kątem prostym,
- punkt przecięcia przekątnych rombu wyznacza środek okręgu wpisanego w romb,
- przekątne rombu dzielą go na cztery przystające trójkąty prostokątne,
- punkt przecięcia przekątnych jest środkiem symetrii rombu.

Trapez

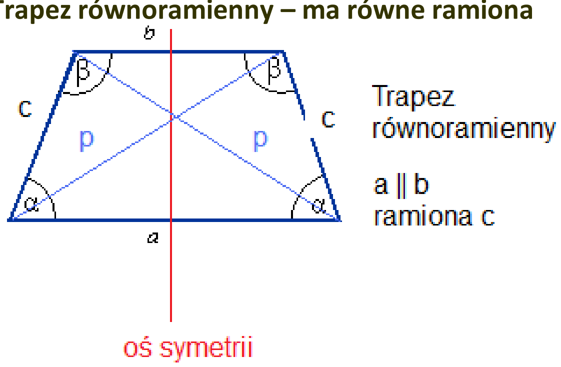
Trapezem nazywamy taki czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych.



a - podstawa dolna trapezu
b - podstawa górna trapezu
c, *d* - ramiona trapezu,
h - wysokość trapezu
Suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu jest równa 180°.
α + δ = 180°,
β + γ = 180°.

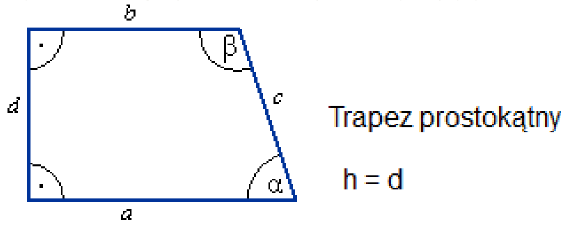
Obwód trapezu: **Ob = a + b + c + d**
Pole trapezu: **P = ½ * (a+b) *h**

Trapez równoramienny – ma równe ramiona



Kąty przy tej samej podstawie trapezu równoramiennego mają równe miary.
α + β = 180⁰
Przekątne **p** w trapezie równoramiennym mają równe długości.
Trapez równoramienny posiada oś symetrii będącą symetralną jednej z podstaw.

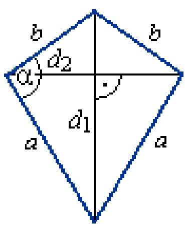
Trapez, którego jedno ramię tworzy kąty proste z podstawami, nazywa się **trapezem prostokątnym**.



W trapezie prostokątnym ramię prostopadłe **d** jest wysokością trapezu h.

Deltoid

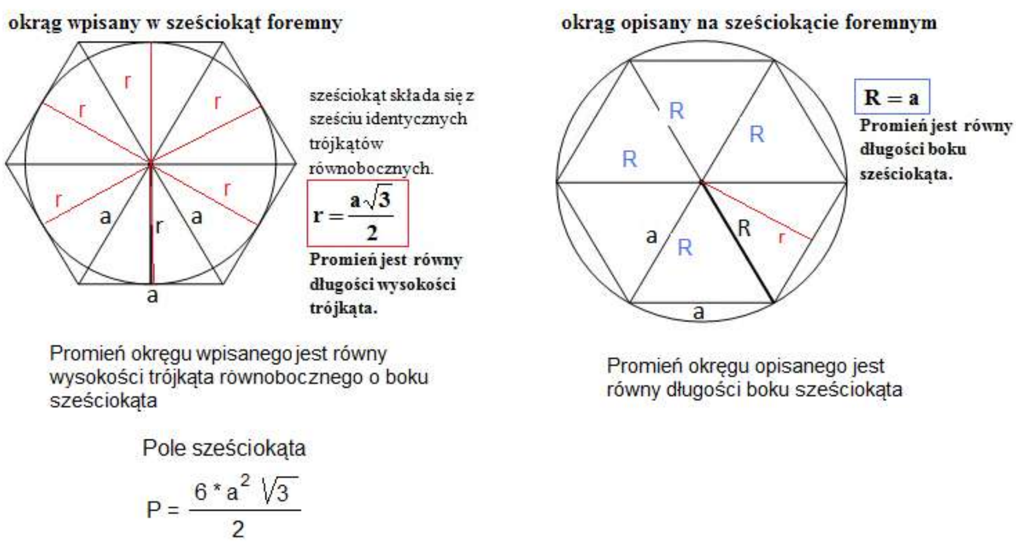
Deltoidem nazywamy czworokąt posiadający dwie pary boków sąsiednich równych,
w którym *żadne dwa boki nie są wzajemnie równoległe.*



Ob = 2a + 2b
P= ½ * d1 ·d2
P = a · b · sin α

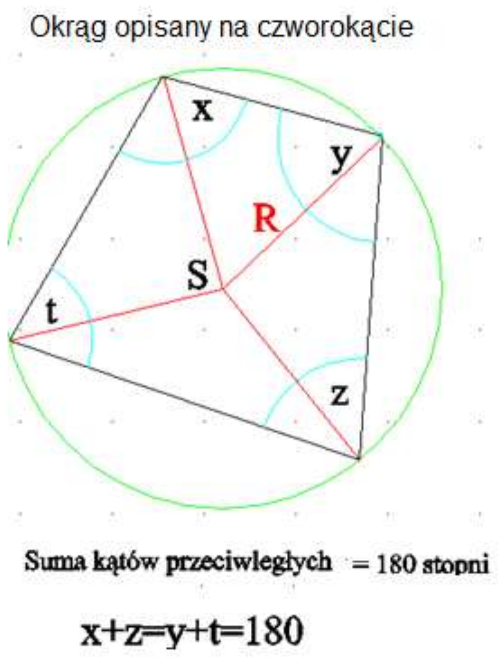
Własności deltoidu
- kolejne boki są równe,
- kąty między różnymi bokami są równe,
- przekątne są prostopadłe,
- przekątna d_2 dzieli deltoid na dwa trójkąty równoramienne

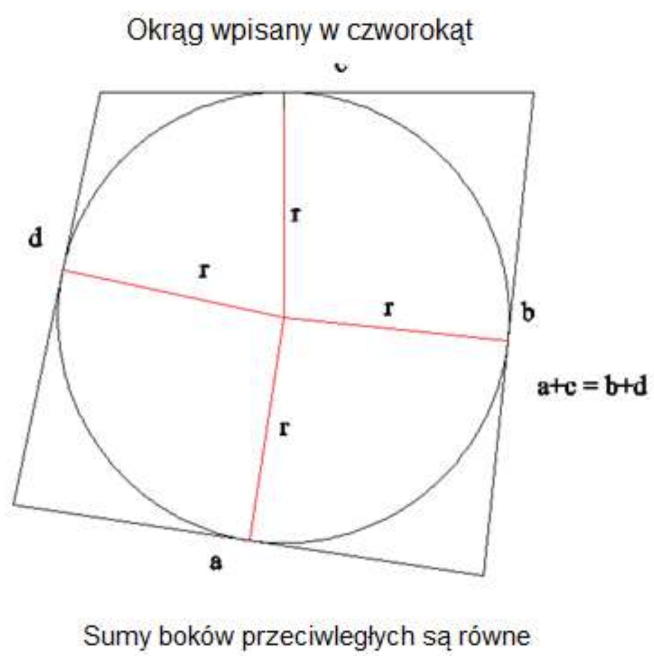
Sześciokąt foremny



Sześciokąt foremny i okregi: wpisany i opisany

Okrąg opisany na czworokącie i okrąg wpisany





Obwody i pola figur płaskich

Figura	**Oznaczenia**	**Obwód L**	**Pole**	**Promienie okręgu opisanego – R i wpisanego - r**
Trójkąt	a, b, c – boki h_a, h_b, h_c – wysokości z boków a, b, c α, β, γ –kąty naprzeciw a, b, c $\alpha+\beta+\gamma = 180^0$	**L = a+b+c** Jeśli trójkąt równoramienny to *L = a + 2b* W trójkącie równobocznym *L = 3a*	**P = ½ *a* h_a,** P = ½ *b*h_b P = ½*c*h_c **P = ½*a*b*sin γ** P = ½*b*c*sin α P = ½*a*c*sin β **P =√p(p-1)*(p-b)*(p-c),** gdzie p =1/2*(a+b+c) P = abc/(4R) = rp $P=2*R^2*\sin\alpha*\sin\beta\sin\gamma$	$R = \frac{abc}{4rp}$ R = abc/(4P) $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ $r = \frac{abc}{4Rp}$
Kwadrat	a - bok	L = 4a	$P = a^2$	R = ½ *a * √2 R = ½ * a
Prostokat	a, b - boki	L = 2a + 2b L = 2*(a+b)	P = a*b	przekątna $d = \sqrt{a2 + b^2}$ R = d/2 $R = \frac{1}{2} * \sqrt{a^2 + b^2}$ *r – nieokreślone okręgu nie można wpisać*
Równoległobok	a, b – boki h_a, - wysokość	L = 2a + 2b L = 2*(a+b)	$P = a*h_a$ $P=b*h_b$	

	opuszczona na a h_b – wysokość opuszczona na b			
Romb	a – bok e, f – przekątne rombu	L = 4a	P = a*h P = ½ * e*f	r = ½ * h r = ½ a * sin α R – nieokreślone
Trapez	a, b – podstawy c, d - ramiona	L = a+b+ c+d	P = ½ * (a+b)*h h – wysokość trapezu	
Deltoid – przekątne prostopadłe	a, b – boki e, f - przekątne	L = 2a + 2b	P = ½ * e * f	
Koło	r – promień d - średnica	L = 2π*r L = π*d	P = $\pi * r^2$ P = $\pi * d^2 /4$	
Wycinek kołowy	r – promień koła α – kąt środkowy, na którym oparty jest łuk	L = $\frac{\pi}{360}$* 2π*r L = $\frac{\pi}{180}$* π*r L = $\frac{\pi}{360}$* π*d	P_w = L = $\frac{\alpha}{360}$* $2\pi * r^2$	

Wielokąty foremne:

trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny, sześciokąt foremny …

Wielokąt foremny

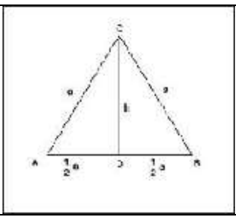
Wielokąt foremny – wielokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości i wszystkie kąty równe.

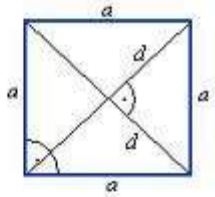
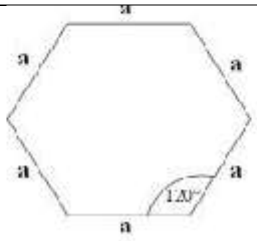
Kąt środkowy (pomiędzy promieniami okręgu opisaneg0) wielokąta foremnego
$\alpha_s = 360^0 /n$, gdzie **n** – ilość boków (kątów) wielokąta.

Kąt wewnętrzny (kąt między sąsiednimi bokami)
$\alpha_w = 180^0 - \alpha_s = 180^0 *(n-2) / n$

Suma kątów wewnętrznych wielokąta zamkniętego: **S α_w = (n-1)* 180^0**

Ilość przekątnych dowolnego n - kąta: **n*(n-3)/2**

Figura	Rysunek	Promień okręgu opisanego R	Promień okręgu wpisanego r	Pole S	Kąt wewnętrzny
Trójkąt równoboczny		**h =** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ R = 2/3 * h $\frac{\sqrt{3}}{3}$a =a$\sqrt{3}/3$	r = 1/3 * h $\frac{\sqrt{3}}{6}$a = a$\frac{\sqrt{3}}{6}$ R + r = h	P = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ P = $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$	**60^0** Kąt środkowy = 360/n = 120^0

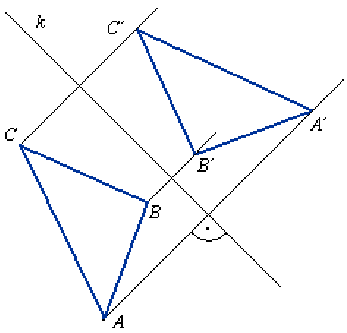
Kwadrat		R = ½ *d $\frac{\sqrt{2}}{2}a = a\frac{\sqrt{2}}{2}$	r = ½ a	P = a^2	**90^0**
Sześciokąt foremny		R = a	$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ r = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$	P = $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$	**120^0**

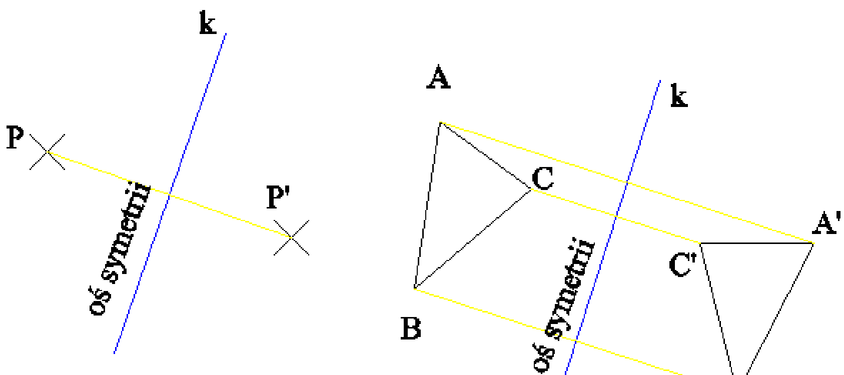
Osie symetrii

Symetrie

Symetria osiowa

<u>Symetrię osiową</u> względem prostej *k* nazywamy również <u>odbiciem symetrycznym względem prostej *k*</u> <u>lub symetrią względem prostej</u> *k*.
Każdy punkt prostej *k* jest punktem stałym symetrii





Symetria osiowa

<u>Przykłady</u>

Odcinek ma 2 osie symetrii – prostą przechodzącą przez odcinek i symetralną odcinka
Trójkąt równoramienny ma jedną oś symetrii, a **trójkąt równoboczny** 3 osie symetrii
Kwadrat ma 4 osie symetrii
Prostokąt – 2 osie
Romb – 2 osie
Równoległobok, który nie jest rombem *nie ma osi symetrii*
Trapez równoramienny – jedna oś symetrii
Deltoid – 1 oś symetrii
Koło – nieskończenie wiele osi symetrii – każda prosta przechodząca przez środek koła

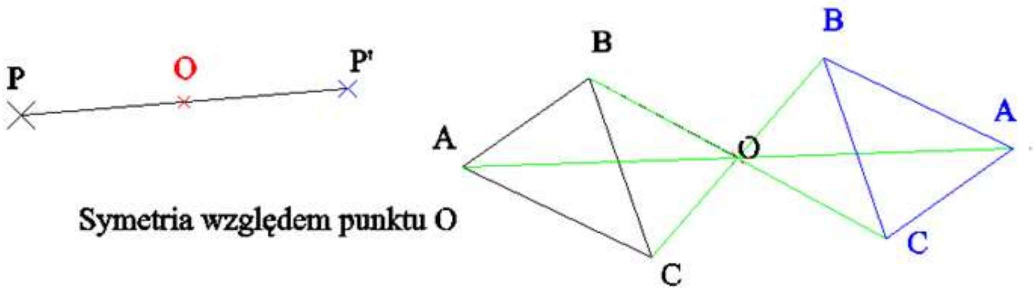
---

Symetria środkowa – symetria względem punktu

Dwa punkty **P** i **P’** są *symetryczne do siebie względem danego punktu **O***, jeżeli punkt **O** jest środkiem odcinka **PP’**.

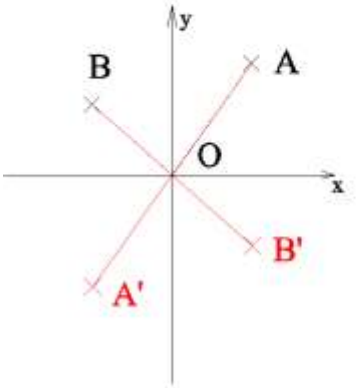
Symetrią środkową względem punktu *O* zwanego środkiem symetrii nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym punkt *O* jest stały,
a każdemu innemu punktowi *A* przyporządkowuje punkt *A*' taki, że punkt *O* jest środkiem odcinka *AA*'.
Symetrię środkową o środku *O* nazywamy również odbiciem symetrycznym względem punktu *O* lub symetrią względem punktu *O*.
Punkt *O* jest punktem stałym symetrii środkowej.

Figura *f* ma środek symetrii *S*, jeżeli punkty symetryczne względem *S* do punktów figury *f* też należą do *f*.
Punkt *S* nazywamy środkiem symetrii figury *f*.



Środek symetrii figury – punkt względem którego obrazem figury jest ta sama figura.
Figura mająca jeden środek symetrii nazywa się środkowo symetryczną.
Przykłady
Równoległobok ma środek symetrii – punkt przecięcia przekątnych
Prosta ma nieskończenie wiele środków symetrii
Koło ma środek symetrii – środek koła
Żaden trójkąt nie ma osi symetrii.

Symetria w układzie współrzędnych – względem początku układu współrzędnych.
Punktem symetrycznym do punktu A = (x, y) jest punkt A’ = (-x, -y),
punktem symetrycznym do punktu B = (-x, y) jest punkt B’ = (x, -y)



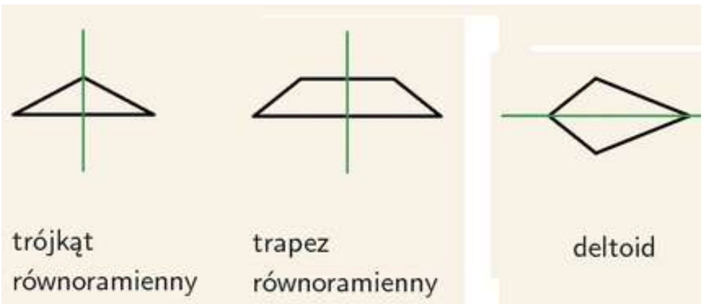
Oś symetrii figury

Oś symetrii figury jest prostą, względem której figura ta jest do siebie symetryczna osiowo.
Oś symetrii dzieli figurę na 2 części przystające.

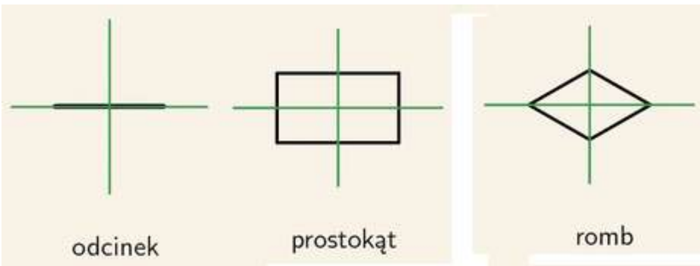
Figura *f* ma oś symetrii *k*, jeżeli punkty symetryczne względem *k* do punktów figury *f* też należą do *f*.
Prostą *k* nazywamy osią symetrii figury *f*.

Figurę, która posiada co najmniej jedną oś symetrii nazywamy osiowosymetryczną.

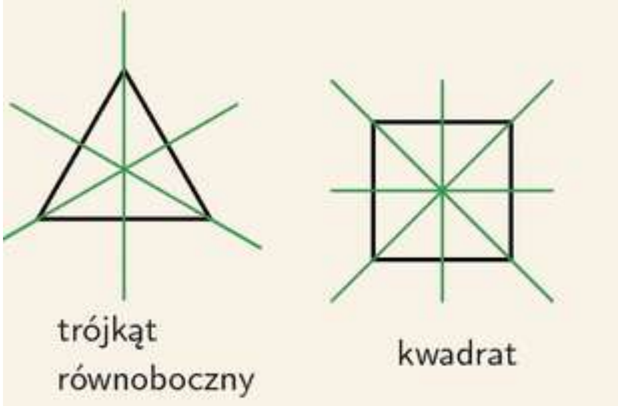
Figury z jedną osią symetrii

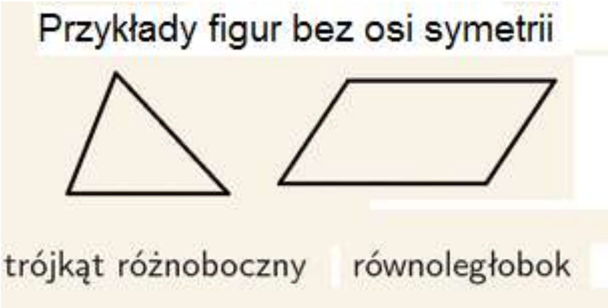


Figury z 2 osiami symetrii



Figury z 3 osiami symetrii





Osie symetrii wśród wielokątów:
trójkąt równoramienny - 1 oś symetrii,
trójkąt równoboczny - 3 osie symetrii,
kwadrat - 4 osie symetrii,
prostokąt - 2 osie symetrii,
romb - 2 osie symetrii,
równoległobok - *nie posiada osi symetrii*
trapez równoramienny - 1 oś symetrii,
deltoid - 1 oś symetrii.

Figury z nieskończoną ilością osi symetrii: **okrąg, koło**.

Koło i okrąg

Koło o środku O i promieniu r to zbiór wszystkich punktów, które leżą w odległości od punktu O nie większej niż r.
Koło to część płaszczyzny ograniczona okręgiem wraz z tym okręgiem.

Okrąg-o środku O i promieniu r to zbiór punktów, które leżą w odległości r od punktu O. Oznaczamy o(O, r)

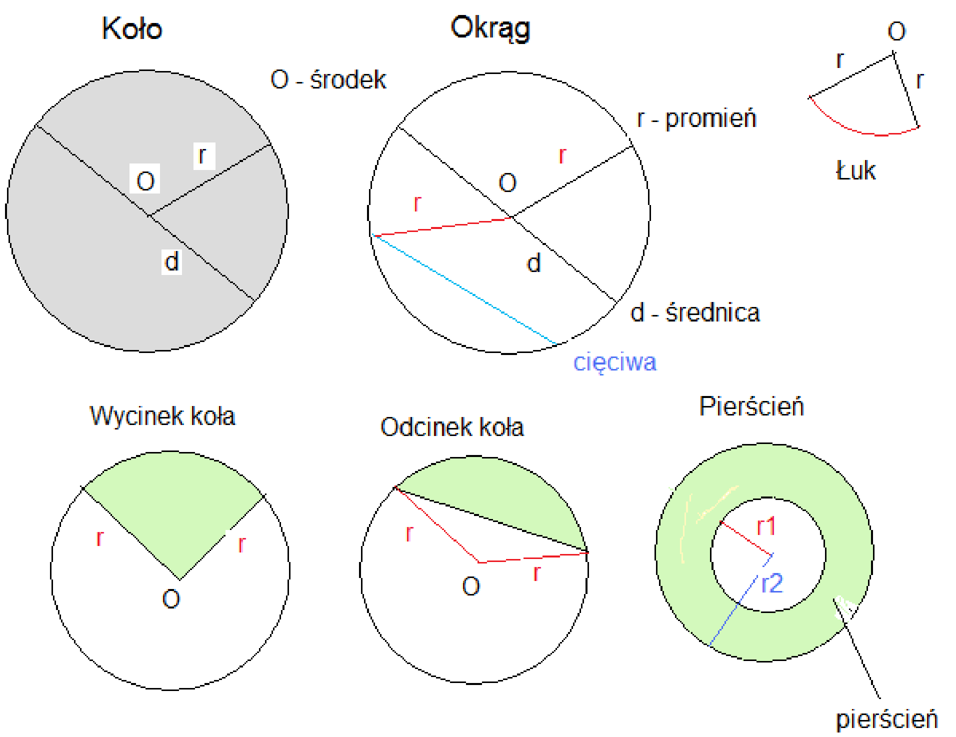
Okrąg - krzywa, której wszystkie punkty leżą w tej samej odległości r od danego punktu O zwanego środkiem okręgu.
r - promień; *O* - środek koła lub okręgu, *d* – średnica = 2r

Cięciwa – odcinek, którego końce leżą na okręgu.
Najdłuższa cięciwa nazywa się średnicą d.

Łuk – część okręgu, zawarta miedzy 2 punktami leżącymi na okręgu, wraz z tymi punktami.

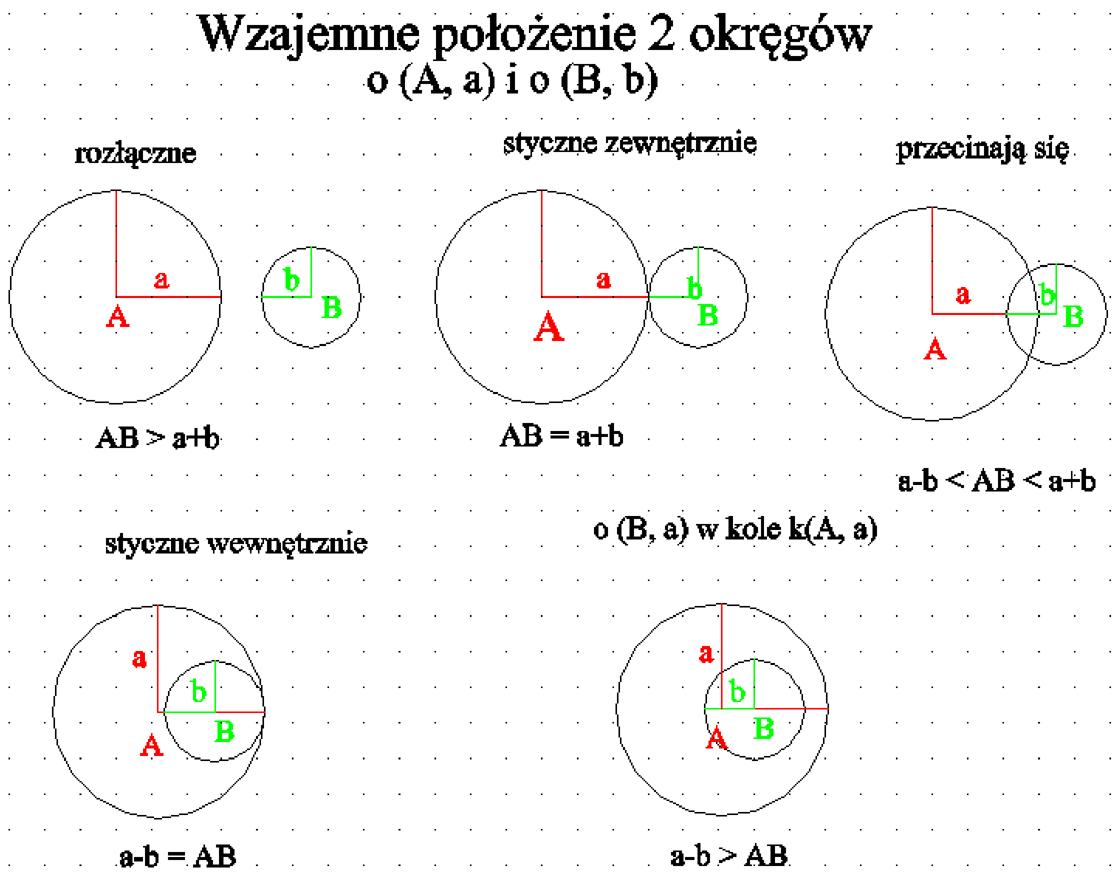
Wycinek koła – część koła zawarta między 2 promieniami wraz z tymi promieniami i łukiem.
Dwa promienie dzielą koło na 2 wycinki.

Odcinek koła – część koła zawarta między cięciwą i łukiem wraz z tą cięciwą i łukiem.
Cięciwa dzieli koło na 2 odcinki.



Wzajemnie położenie dwóch okręgów

Rozłączne
Przecinające się
Styczne zewnętrzne
Styczne wewnętrznie



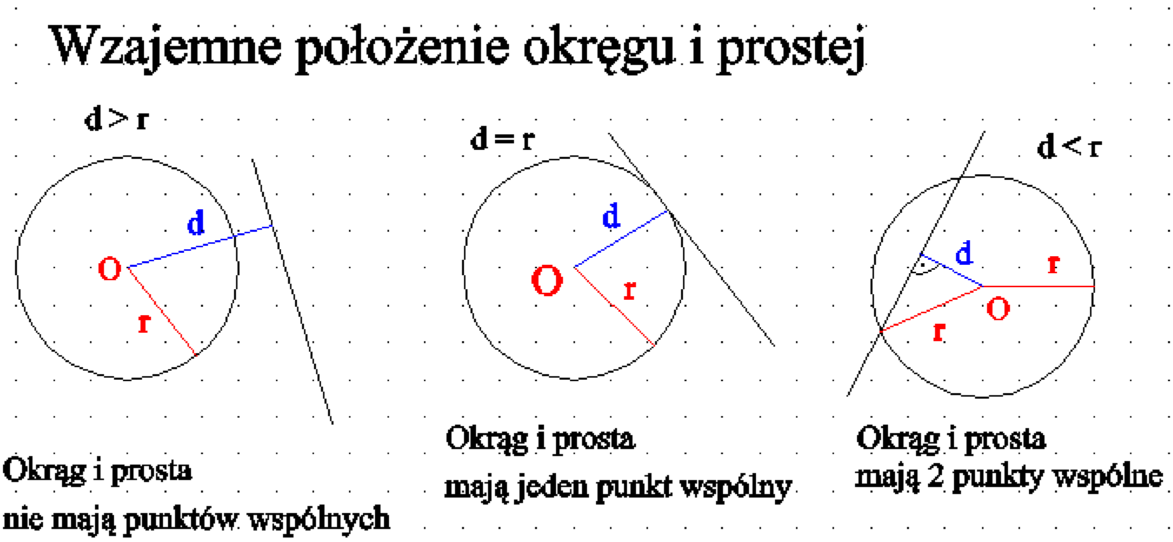
Wzajemnie położenie okręgu i prostej

Okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych – odległość prostej od środka okręgu jest promienia

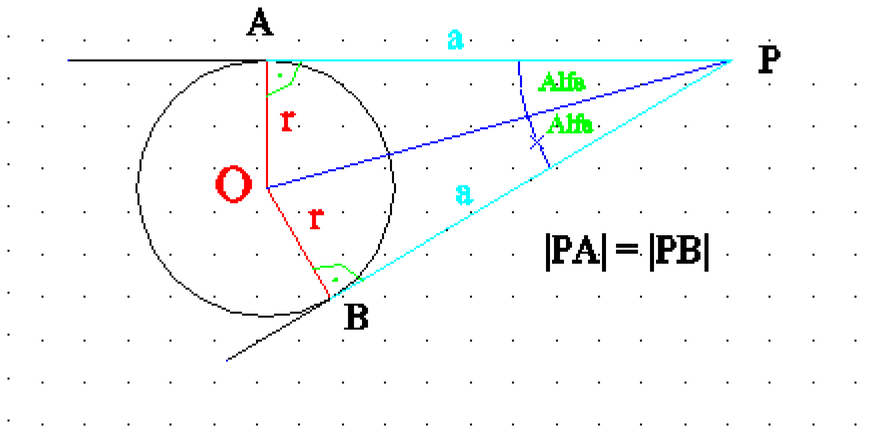
Mają 2 punkty wspólne - odległość prostej od środka okręgu jest mniejsza od promienia

Mają dokładnie jeden punkt wspólny – styczna do okręgu. Odległość stycznej jest równa długości promienia.

Promień poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do stycznej w tym punkcie.



Dwie styczne przecinające się wyznaczają dwa odcinki równej długości.

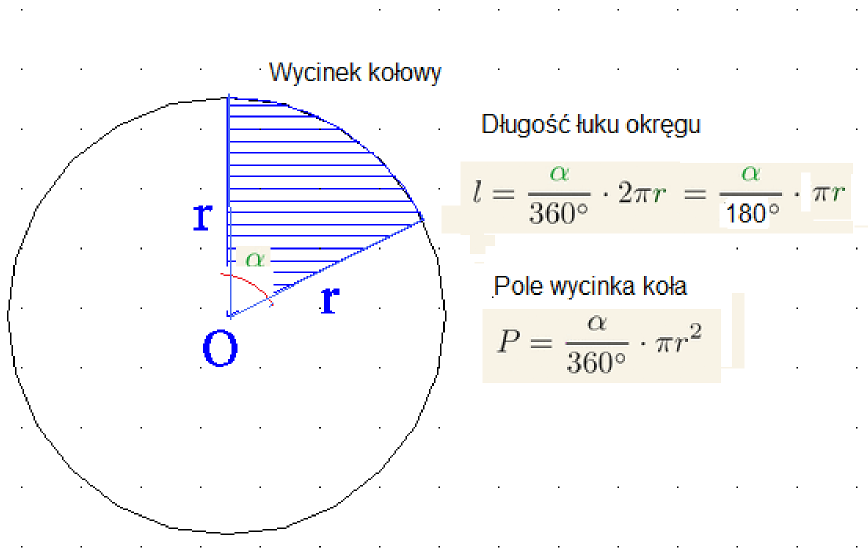


Dwie styczne do okręgu przecinające się w punkcie P

Długość okręgu i pole koła
Długość okręgu: L = 2πr
Pole koła: P = πr^2

Długość łuku okręgu o kącie środkowym α i promieniu r: Ł = α/ 180° * πr^2

Pole wycinka koła: $P_w = \alpha / 360^o * \pi r^2$



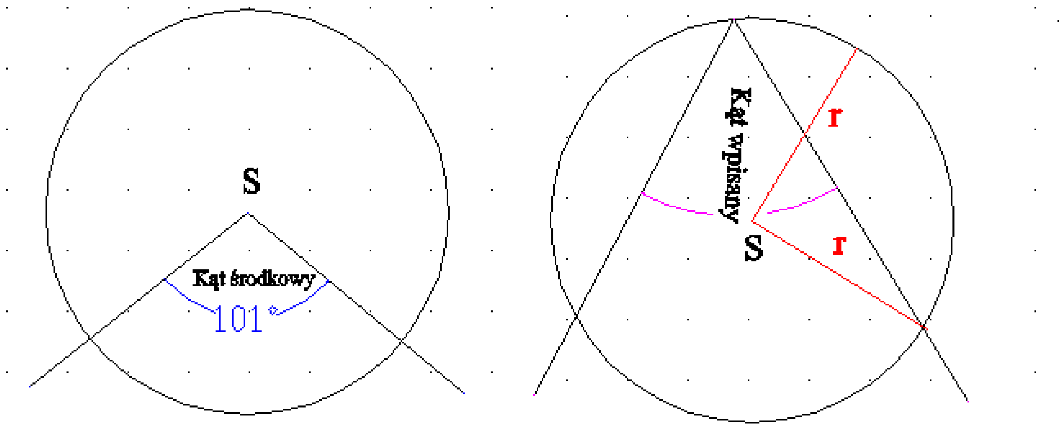
Kąty w kole

Kąt <u>**środkowy**</u> – kąt, którego wierzchołek znajduje się w środku koła, a ramiona zawierają promienie.

Wszystkie kąty **środkowe** oparte na łuku o tej samej długości, w tym samym okręgu są równe.

Kąt **wpisany** – kąt, którego wierzchołek znajduje się na okręgu, a ramiona zawierają cięciwy.

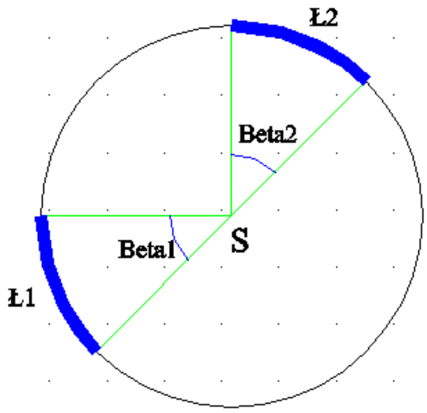
Wszystkie kąty **wpisane** w ten sam okrag oparte na tym samym łuku są równe.



Własności kątów wpisanych i opisanych:

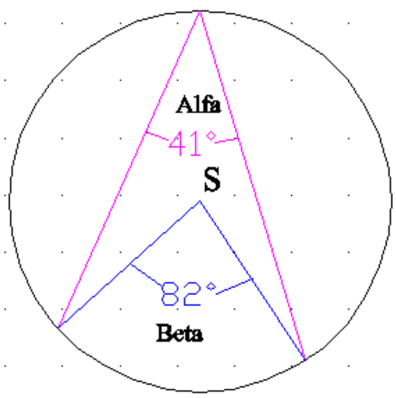
1. Jeżeli kąty środkowe w kole mają równe miary, to długości łuków, na których opierają się te kąty są takie same.
2. Jeżeli kąt **wpisany** i **opisany** oparte są na tym samym łuku, to miara kąta środkowego jest 2 razy większa od miary kata wpisanego
3. Jeżeli **kąt wpisany** jest opary na półokręgu (średnicy), to ten kąt jest kątem prostym
4. Jeżeli kąty wpisane oparte są na łukach tej samej długości to mają te same miary.

Ł1=Ł2 → Beta1 = Beta2



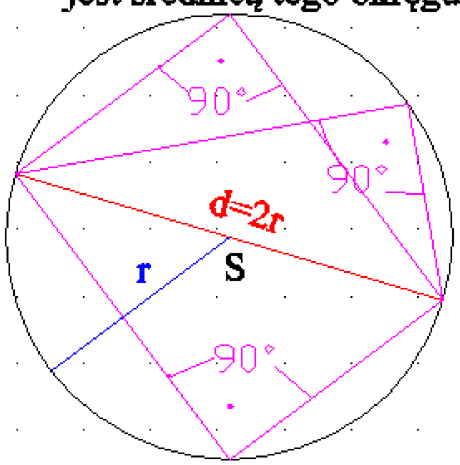
Łuki jednakowej miary
to kąty Beta jednakowe

Beta = 2*Alfa



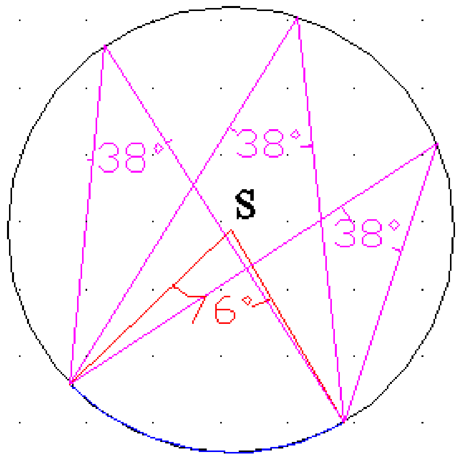
Kąt środkowy Beta jest 2 razy
większy od kąt wpisanego Alfa
opartego na tym samym łuku

Bok trójkąta wpisanego w okrąg
jest średnicą tego okręgu



Kąt oparty na średnicy
jest kątem prostym

Te same kąty wpisane
- oparte na łuku o jednakowej długości



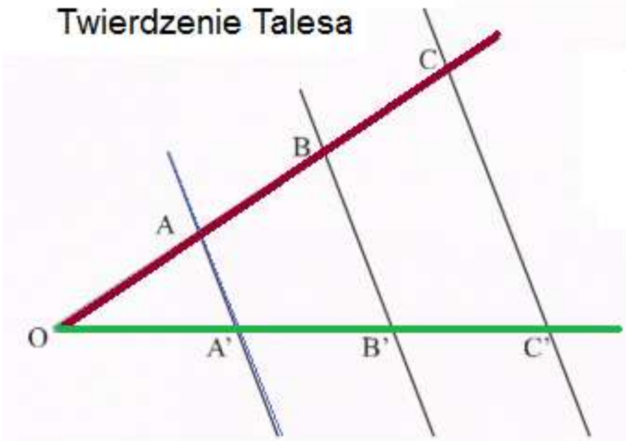
Kąty wpisane oparte na tm samym łuku
są jednakowe, równe połowie kąt środkowego

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetnie się dwiema prostymi równoległymi,

to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta

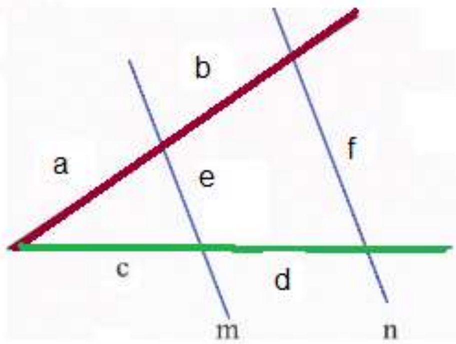
są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez proste na drugim ramieniu kąta.



$$AA' \parallel BB'$$

|OA|/|OB| = |OA'|/|OB'|
||OA|/||OC| = |OA'| / |AC'|

|OA|/|OA'| = |AB|/|A'B'|



$$m \parallel n$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \qquad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

$$\frac{c}{c+d} = \frac{a}{a+b} \qquad \frac{d}{c+d} = \frac{b}{a+b}$$

$$\frac{a}{e} = \frac{a+b}{f} \qquad \frac{c}{e} = \frac{c+d}{f} \qquad \frac{f}{e} = \frac{a+b}{a}$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetnie się 2 prostymi i długości odcinków wyznaczonych przez te proste

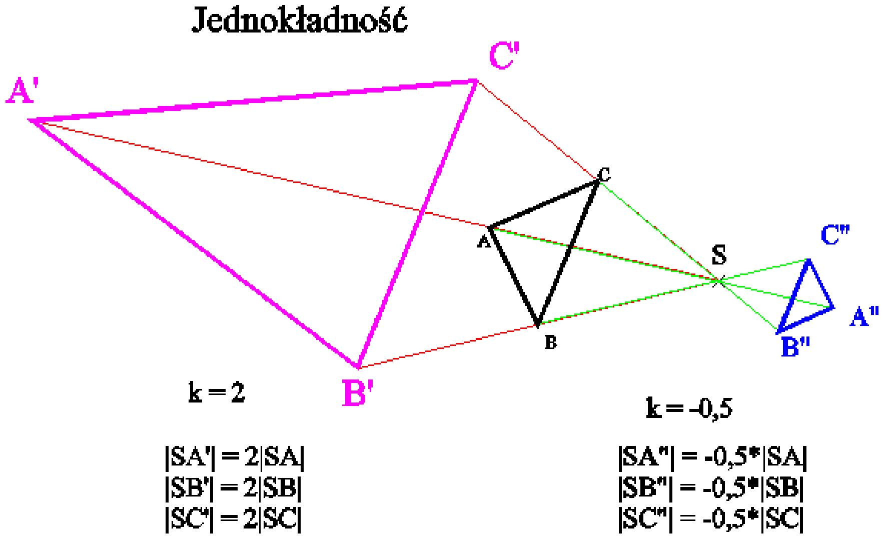
Na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.

Jednokładność i podobieństwo figur

Jednokładność o środku S i skali k to przekształcenie punktu A na A’, w którym:

punkty S, A i A’ są współliniowe oraz |SA’| = k*|SA|

Jednokładność odwrotna to jednokładność o skali ujemnej.



Własności jednokładności:

Środek jednokładności, punkt i jego obraz są współliniowe

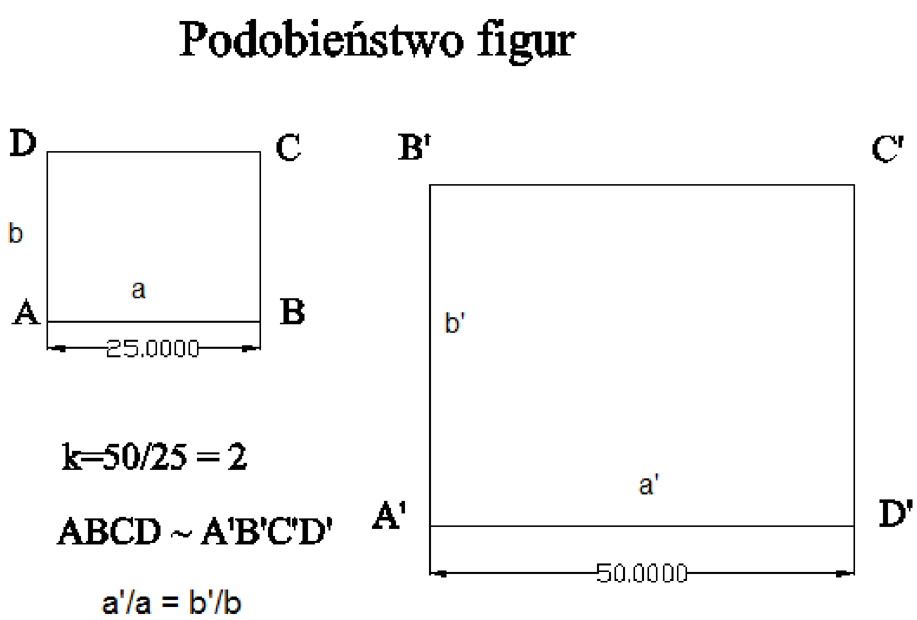
Odcinek i jego obraz są odcinkami równoległymi

Stosunek długości odcinka i jego obrazu jest równy k

Stosunek pól figur jednokładnych jest równy k^2

Podobieństwo figur

Figury są podobne, jeżeli odpowiednie odcinki jednej figury są proporcjonalne do odpowiednich odcinków drugiej figury.
Skala podobieństwa figur k – stosunek odcinków proporcjonalnych.



Dwa prostokąty są podobne, jeżeli stosunek długości dwóch prostopadłych boków jednego prostokąta
jest równy stosunkowi długości odpowiednich boków drugiego prostokąta

Cechy podobieństwa trójkątów:
Trójkąty są podobne jeżeli:
Kąty jednego trójkąta są odpowiednio równe kątom drugiego trójkąta
Boki jednego trójkąta są proporcjonalne do boków drugiego trójkąta
Dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do boków drugiego trójkąta oraz kąty zawarte między tymi bokami są równe.

Stosunek pól 2 figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa
$P2 / P1 = k^2$