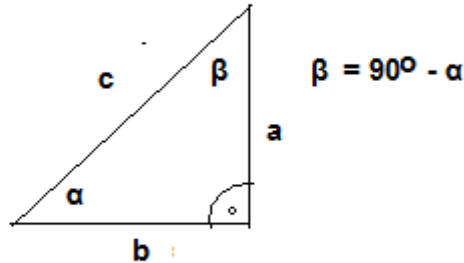


# Funkcje trygonometryczne

## Funkcje trygonometryczne kąta ostrego



$$\sin \alpha = a/c$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a/b$$

$$\cos \alpha = b/c$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = b/a$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$

Kąt $\alpha$ [ $^\circ$ ]	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

## Związki między funkcjami trygonometrycznymi

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  (jedyńka trygonometryczna)

$$1/\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin \alpha / \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos \alpha / \sin \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 / (\operatorname{ctg} 90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$$

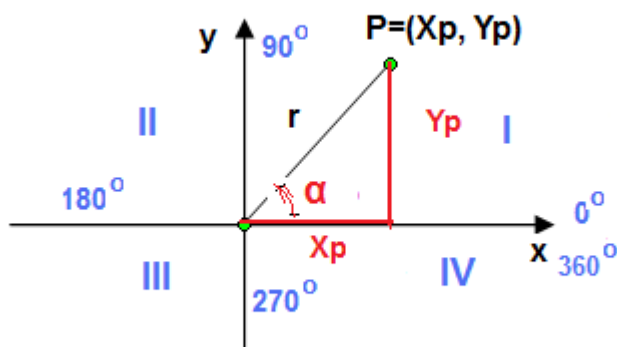
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

## Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta $\alpha$



$$\sin \alpha = Yp / r$$

$$\operatorname{tg} \alpha = Yp / Xp$$

$$\cos \alpha = Xp / r$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = Xp / Yp$$

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos(\alpha + 360^\circ)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 360^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + 360^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha$$

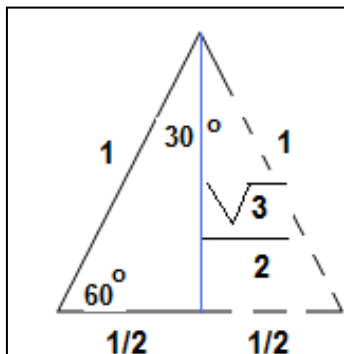
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Funkcje trygonometryczne kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  – wartości na wykresach



Funkcje sinus i cosinus kątów  $30^\circ$  i  $60^\circ$  - bezpośrednio z wykresu

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}$$

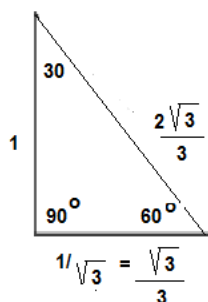
Funkcje tangens i cotangens kątów  $30^\circ$  i  $60^\circ$  – z obliczeń

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

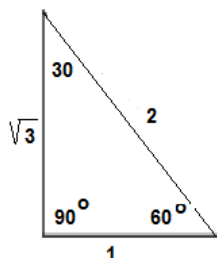
$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Wartości funkcji  $\operatorname{tg} 30^\circ$  i  $\operatorname{ctg} 60^\circ$  - bezpośrednio z wykresu

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}/3}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

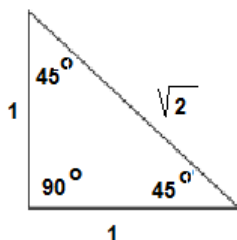
$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/3}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Wartości funkcji  $\operatorname{tg} 60^\circ$  i  $\operatorname{ctg} 30^\circ$  - bezpośrednio z wykresu

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$



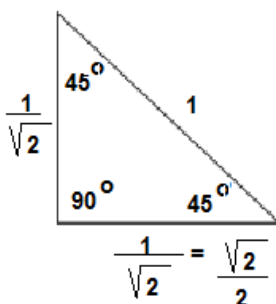
Wartości funkcji tangens i cotangens kąta  $45^\circ$  - bezpośrednio z wykresu

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



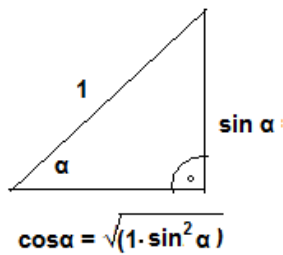
Wartości funkcji sinus i cosinus kąta  $45^\circ$  - bezpośrednio z wykresu

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## Przeliczenie wartości funkcji trygonometrycznych kąta 0-90°

– podana wartość jednej funkcji, obliczenie pozostałych

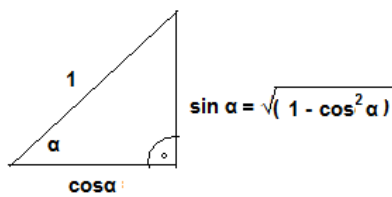


Dany  $\sin \alpha$ , obliczenie pozostałych funkcji trygonometrycznych

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = \sin \alpha / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} / \sin \alpha$$

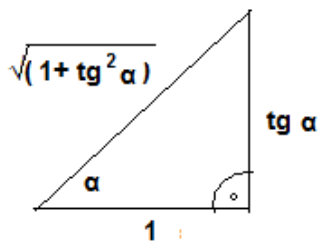


Dany  $\cos \alpha$ , obliczenie pozostałych funkcji trygonom.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} / \cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha = \cos \alpha / \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

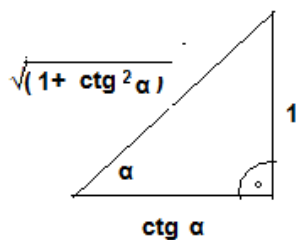


Dany  $\operatorname{tg} \alpha$ , obliczenie pozostałych funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1 / \operatorname{tg} \alpha$$



Dany  $\operatorname{ctg} \alpha$ , obliczenie pozostałych funkcji trygonometrycznych

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 / \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin \alpha = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha / \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

## Znaki funkcji trygonometrycznych

Ćwiartka układu	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
I ( $0^\circ - 90^\circ$ )	+	+	+	+
II ( $90^\circ - 180^\circ$ )	+	-	-	-
III ( $180^\circ - 270^\circ$ )	-	-	+	+
IV ( $270^\circ - 360^\circ$ )	-	+	-	-

### Wierszyk dotyczący znaków funkcji trygonometrycznych:

W pierwszej wszystkie są dodatnie

w drugiej tylko sinus

w trzeciej tangens i cotangens

a w czwartej cosinus

### Wartości funkcji trygonometrycznych dla wielokrotności kąta $90^\circ$

	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	- ( $\infty$ )	0	- ( $\infty$ )	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	- ( $\infty$ )	0	- ( $\infty$ )	0	- ( $\infty$ )

### Wzory redukcyjne

$\phi$	$90^\circ - \alpha$	$90 + \alpha$	$180 - \alpha$	$180 + \alpha$	$270 - \alpha$	$270 + \alpha$	$360 - \alpha$
$\sin \phi$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \phi$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \phi$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \phi$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

### Wzory trygonometryczne

#### Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) / (1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = (\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1) / (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) / (1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = (\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1) / (\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)$$

#### Funkcje trygonometryczne kąta podwojonego

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha / (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = (\operatorname{ctg}^2\alpha - 1) / (2 \operatorname{ctg}\alpha)$$

### Funkcje trygonometryczne połowy kąta

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{(1-\cos\alpha)/2}$$

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$$

(bierzemy znak + lub - w zależności od tego, do której ćwiartki należy  $\alpha/2$ )

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/\sin\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha/2) = (1+\cos\alpha)/\sin\alpha$$

### Sumy funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 * \sin((\alpha+\beta)/2) * \cos(\alpha-\beta)/2$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 * \cos((\alpha+\beta)/2) * \cos(\alpha-\beta)/2$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \sin(\alpha+\beta) / (\cos\alpha * \cos\beta)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \sin(\alpha+\beta) / (\sin\alpha * \sin\beta)$$

### Różnice funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 * \sin((\alpha-\beta)/2) * \cos(\alpha+\beta)/2$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 * \sin((\alpha-\beta)/2) * \sin(\alpha+\beta)/2$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \sin(\alpha-\beta) / (\cos\alpha * \cos\beta)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \sin(\beta-\alpha) / (\sin\alpha * \sin\beta)$$

### Parzystość i nieparzystość funkcji

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x) \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}(x)$$

### Miara łukowa

– długość łuku wyciętego przez kąt o promieniu **1** i środku w wierzchołku kąta

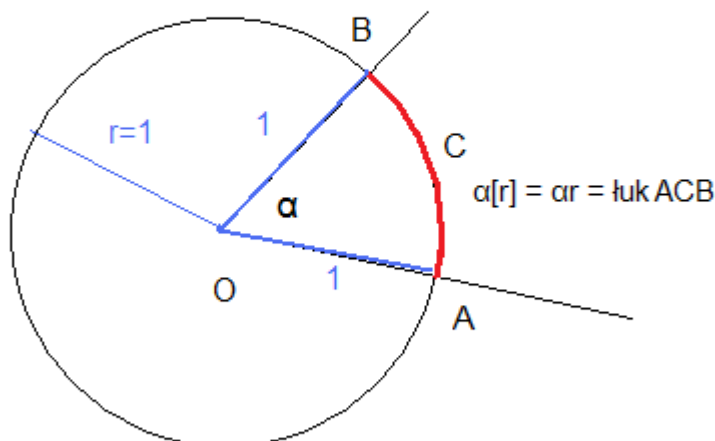
#### Zamiana kątów

$$\alpha[s] / \alpha[r] = 360 / (2 * \pi)$$

$$\alpha[s] / \alpha[r] = 180 / \pi$$

$$\alpha[s] = \alpha[r] * 180 / \pi$$

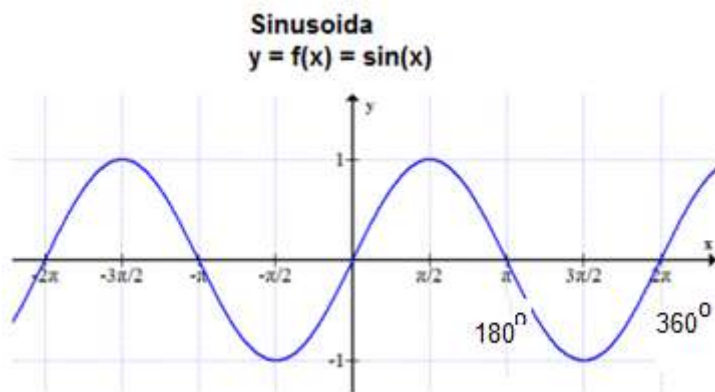
$$\alpha[r] = \alpha[s] * \pi / 180$$



$$\alpha_s = \alpha_r * 180 / \pi \quad \text{kąt w stopniach}$$

$$\alpha_r = \alpha_s * \pi / 180 \quad \text{kąt w radianach (łuku)}$$

## Wykresy funkcji trygonometrycznych: $\sin(x)$ , $\cos(x)$ , $\tan(x)$ , $\cot(x)$



### Sinusoida

Dziedzina :  $D_f = \mathbb{R}$

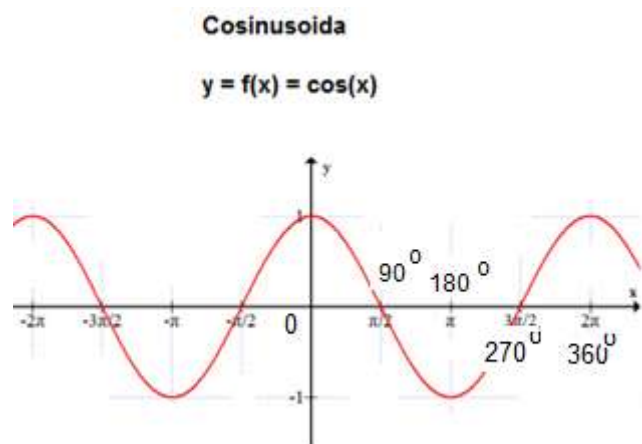
Zbiór wartości:  $Y_f = [-1; 1]$

Miejsca zerowe:  $f(x) = 0$  dla  $x = k \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{C}$

Funkcja nieparzysta:  $\sin(-x) = -\sin(x)$

Funkcja okresowa o okresie  $T = 2\pi = 360^\circ$

Funkcja rośnie w przedziałach  $(-\pi/2 + 2k\pi, 3/2 \cdot \pi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{C}$



### Cosinusoida

Dziedzina :  $D_f = \mathbb{R}$

Zbiór wartości:  $Y_f = [-1; 1]$

Miejsca zerowe:  $f(x) = 0$  dla  $x = \pi/2 + k \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{C}$

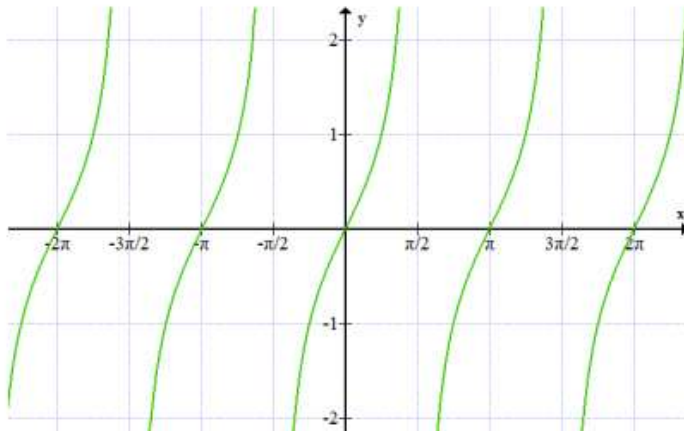
Funkcja parzysta:  $\cos(-x) = \cos(x)$

Funkcja okresowa o okresie  $T = 2\pi = 360^\circ$

Funkcja rośnie w przedziałach  $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{C}$

## Tangensoida

$y = \text{tg}(x)$



## Tangensoida

Dziedzina :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x: x = \pi/2 + k \cdot \pi, k \in \mathbb{C}\}$

Zbiór wartości:  $\mathbb{R}$

Miejsca zerowe:  $f(x) = 0$  dla  $x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{C}$

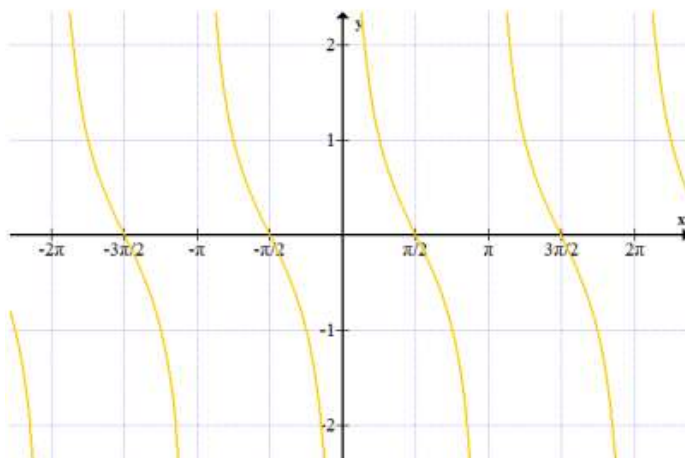
Funkcja nieparzysta:  $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$

Funkcja okresowa o okresie  $T = \pi = 180^\circ$

Funkcja rośnie przedziałami w  $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$   $k \in \mathbb{C}$

## Cotangensoida

$y = \text{ctg}(x)$



## Cotangensoida

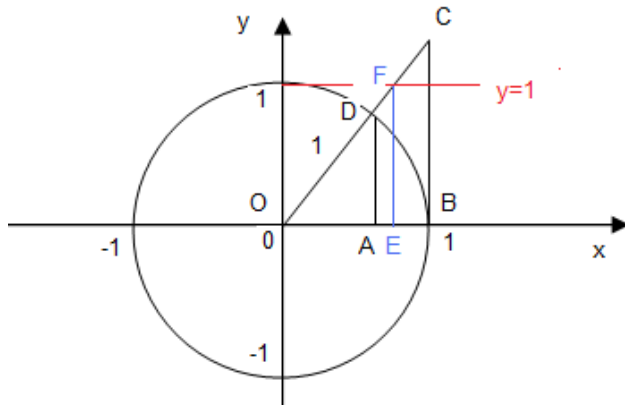
Dziedzina :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x: x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{C}\}$

Zbiór wartości:  $\mathbb{R}$

Miejsca zerowe:  $f(x) = 0$  dla  $x = \pi/2 + k \cdot \pi, k \in \mathbb{C}$

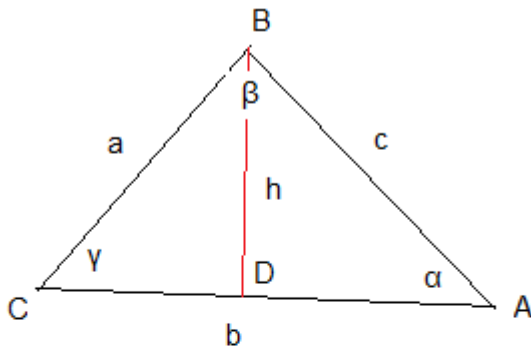
Funkcja nieparzysta:  $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}(x)$   
 Funkcja okresowa o okresie  $T = \pi = 180^\circ$   
 Funkcja rośnie przedziałami w  $(k\pi, \pi+k\pi)$   $k \in \mathbb{C}$

### Zależności między funkcjami trygonometrycznymi



$|AD| = \sin(\alpha)$   $|BC| = \text{tg}(\alpha)$  Łuk  $BD = \alpha$  (w mierze łukowej)  
 $|OA| = \cos(\alpha)$   $|OE| = \text{ctg}(\alpha)$   
 $|\sin(\alpha)| < |\alpha| < |\text{tg } \alpha|$   
 $|\cos(\alpha)| < \text{ctg}(\alpha)$

### Pole trójkąta gdy dane 2 boki i kąt między nimi



$$h/a = \sin \gamma \quad h = a * \sin \gamma$$

$$P(ABC) = 1/2 * h * b = 1/2 * a * b * \sin \gamma$$

### Pole trójkąta

$$P = 1/2 * a * b * \sin \gamma$$

$$P = 1/2 * b * c * \sin \alpha$$

$$P = 1/2 * a * c * \sin B$$