Funkcja liniowa i równania prostej

Opracowano m.in. na podstawie podręcznika „MATEMATYKA w otaczającym nas świecie” zakres podstawowy i rozszerzony”

Funkcja liniowa

Funkcję *f:* R → R określoną wzorem **f(x) = ax+b**, gdzie x ∈ R, *a* ∈ *R* i *b* ∈ *R* nazywamy funkcją liniową.

Litery ***a*** i ***b*** oznaczają liczby dane:

a – **współczynnik kierunkowy,**

b – **wyraz wolny**

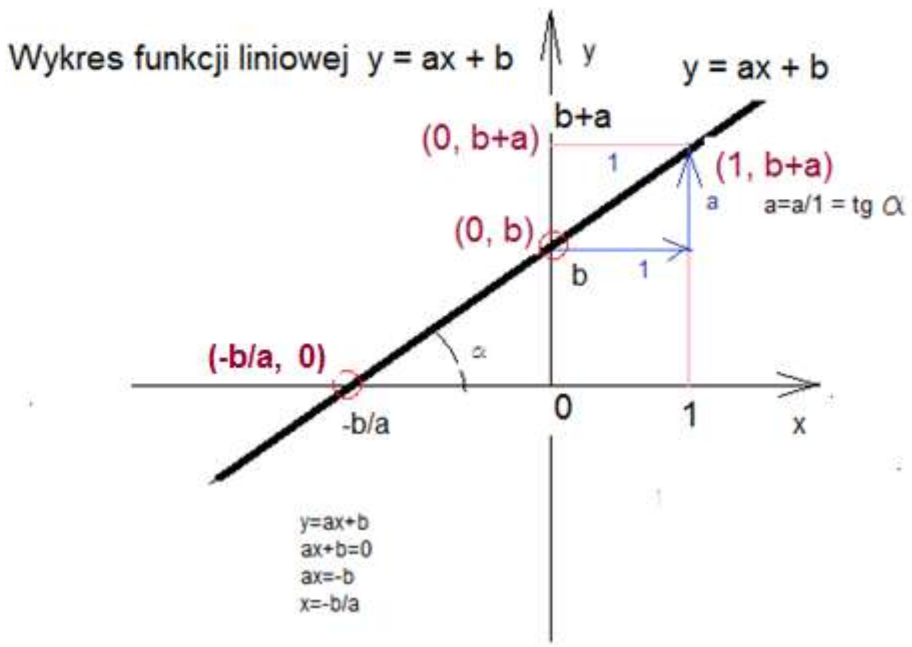
Funkcja liniowa określona jest wzorem:

f(x) = ax + b, gdzie ***a*** i ***b*** są liczbami rzeczywistymi

Wzory: **y = ax + b** i **f(x) = ax + b -** używane zamiennie.

Zmienną **x** nazywamy zmienną niezależną, a **y** zmienną zależną.

Wykresem funkcji liniowej **f(x) = ax + b** jest prosta o równaniu **y = ax + b.**



Prosta ta przecina oś rzędnych w punkcie **(0, b)** i nachylona jest do osi odciętych pod kątem **α**, takim, że **tg α = a**

Współczynnik kierunkowy **a** we wzorze **y = ax + b** opisuje nachylenie prostej względem osi x.

Dziedziną każdej funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych R, czyli przedział $D_f =$ $= (-\infty, +\infty)$

Zbiorem wartości funkcji liniowej określonej wzorem **y = ax+b** jest:
- zbiór liczb rzeczywistych, gdy a =0
- zbiór jednoelementowy {b}, gdy a = 0

Funkcja liniowa f(x) **= ax + b** jest:

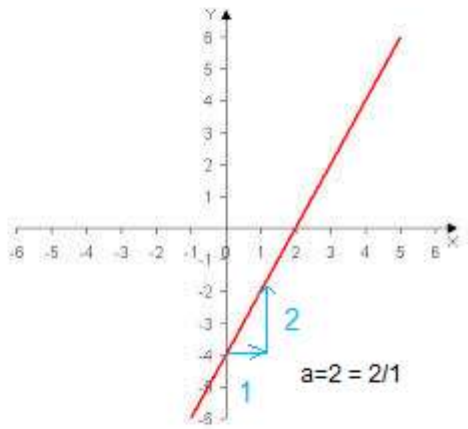
- rosnąca w R, jeśli współczynnik kierunkowy a >0
- malejąca w R, jeśli a <0
- stała, jeśli a = 0

Przykłady:

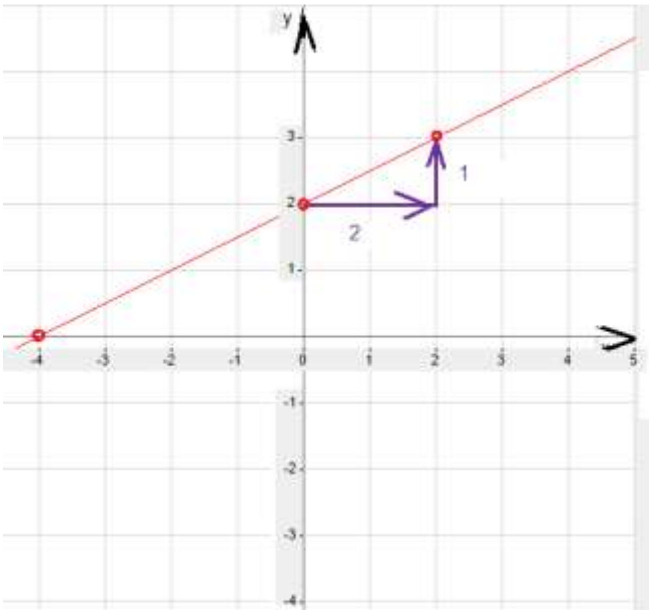
y =-3x +4,	gdzie a = -3, b = 4
f(x) = -x,	a = -1, b = 0;
y = 12,	a = 0, b = 12

Ćw. 2

a) Wykres funkcji **y=2x-4**
Metody sporządzenia wykresu
1) Nanosimy na wykresie punkty z tabelki (min. 3 dla kontroli) i łączymy prostą
2) Zaznaczamy na osi y wartość **b = -4,** czyli oznaczamy punkt **(0, -4)** oraz miejsce zerowe **x=2**, czyli punkt **(2, 0)** i łączymy te punkty prostą
3) Zaznaczamy punkt (**0, -4)** jak wyżej a następnie z tego punktu odkładamy wektor **[1, 2],** ponieważ **a = 2** czyli **2/1** – po osi x wartość **Dx=1**, a po osy y wartość **Dy=2**
Współrzędne początku wektora: **x=0, y = b**
Współrzędne końca wektora: x = 0 + 1 = 1, y = -4 + 2 = -2.
Ogólnie: **x = 1, y = b+a – punkt (1, b+a)**
Czyli współrzędne początku wektora: **(0, b**) a końca: (1, b+a). T
utaj odpowiednio: (0, -4) oraz (1, -2).
4) Wektor ten określa prostą y=2x-4



http://www.jogle.pl/wykresy/



Dziedziną każdej z tych funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych R, czyli przedział $D_f = (-\infty, +\infty)$

Zbiorem wartości funkcji jest:

zbiór **R** czyli $\mathbf{Z_w = Y_f = (-\infty, +\infty)}$ gdy a <> 0

zbiór mający tylko jeden element: $\mathbf{Zw = Y_f = b}$, gdy a = 0

Przykład 3

Sprawdź, które spośród punktów o współrzędnych: (0, 0), (-1, 1), (100, 102) należą do wykresu funkcji f, określonej wzorem: f(x) = x + 2.

Rozwiązanie:

Punkt (x_0, y_0) należy do wykresu funkcji f gdy $f(x_0) = y_0$

f(0) = 0+2 =2 Punkt (0, 0) nie należy do wykresu funkcji f, bo f(0) = 2 i $f(0) \neq 0$ $f(x_0) \neq y_0$

f(-1) = -1 + 2 = 1 Punkt (-1, 1) należy do wykresu funkcji f, bo f(-1) = 1 $f(x_0) = y_0$

f(100) = 100 + 2 = 102

Punkt (100, 102) należy do wykresu funkcji f, bo f(100) = 102 $f(x_0) = y_0$

Ćw. 5

Sprawdź, które spośród punktów: (-8, 45), (-1, 8), (307, 619), (-3215, 6435) należą do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = -2x+ 5$

$f(-8) = -2*(-8) + 5 = 21$ $21 \neq 45$

Punkt (-8, 45) nie należy do wykresu funkcji f, bo $f(-8) \neq y_0,$ gdzie $y_0 = 45$

$f(307) = -2*(307) + 5 = -614 + 5 = -609 \neq 619$

Punkt (307, 619), nie należy do wykresu funkcji f,

$f(-3215) = -2*(-3215) + 5 = 6430 + 5 = 6435$

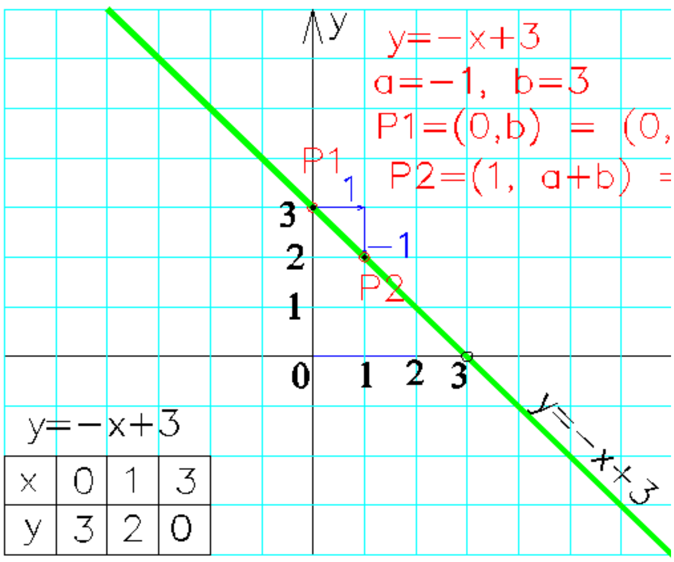
Punkt (-3215, 6435) należy do wykresu funkcji f, bo $f(x_0) = y_0$

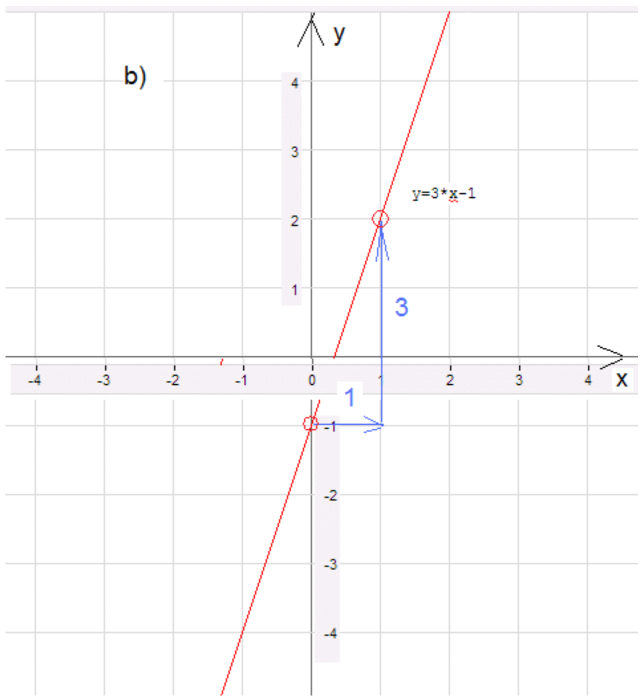
Zadania utrwalające

14.4 Sporządź wykres funkcji funkcji liniowej określonej wzorem :

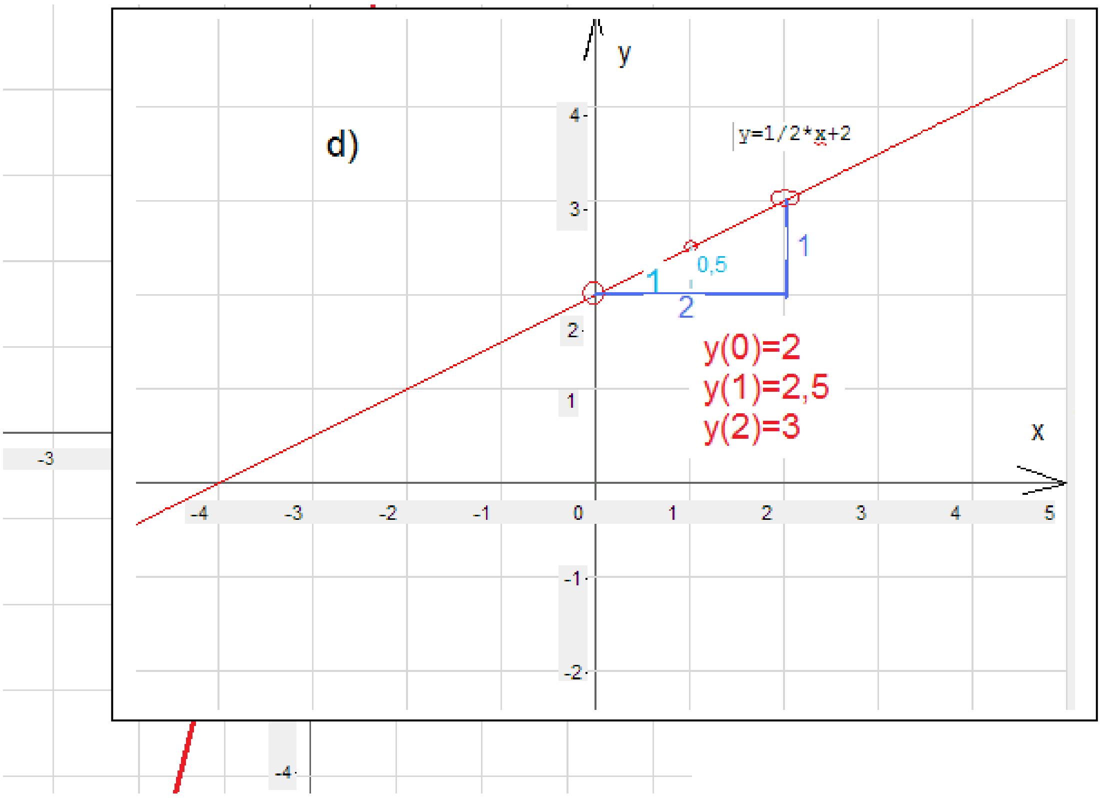
a) $y = -x + 3$ b) $y = 3x – 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = 1/2x +2$ e) $y = -x$ f) $y = 1$

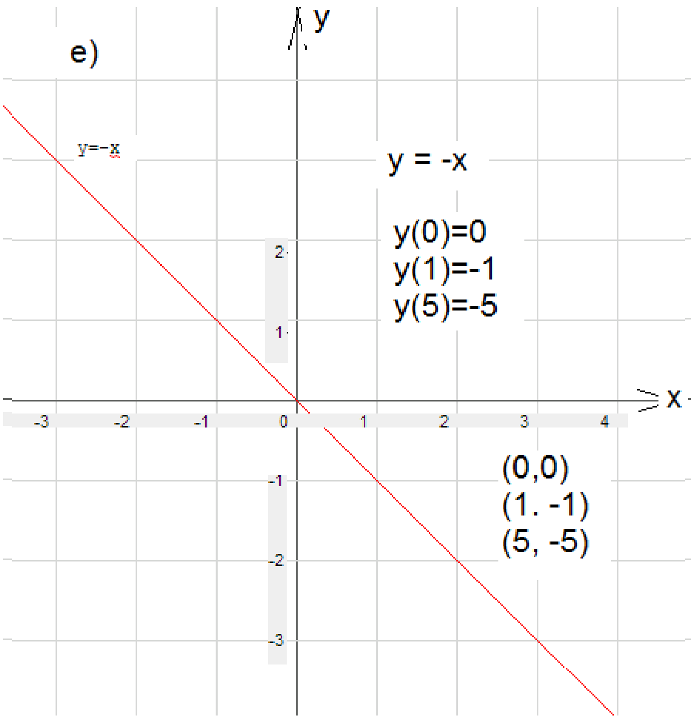
a)

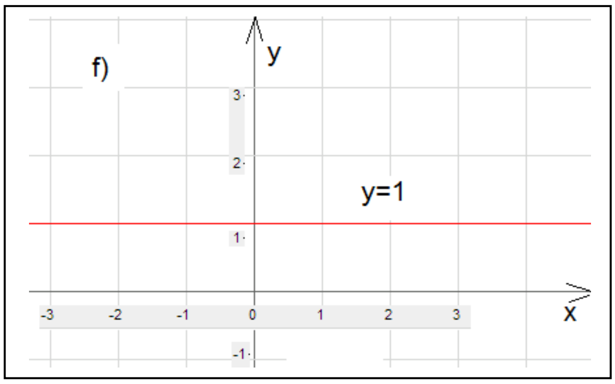




c)


d)
y
x
y=1/2*x+2
1
0,5
1
2
y(0)=2
y(1)=2,5
y(2)=3


e)
y
x
y=-x
y = -x
y(0)=0
y(1)=-1
y(5)=-5
(0,0)
(1. -1)
(5, -5)


f)
y
x
y=1

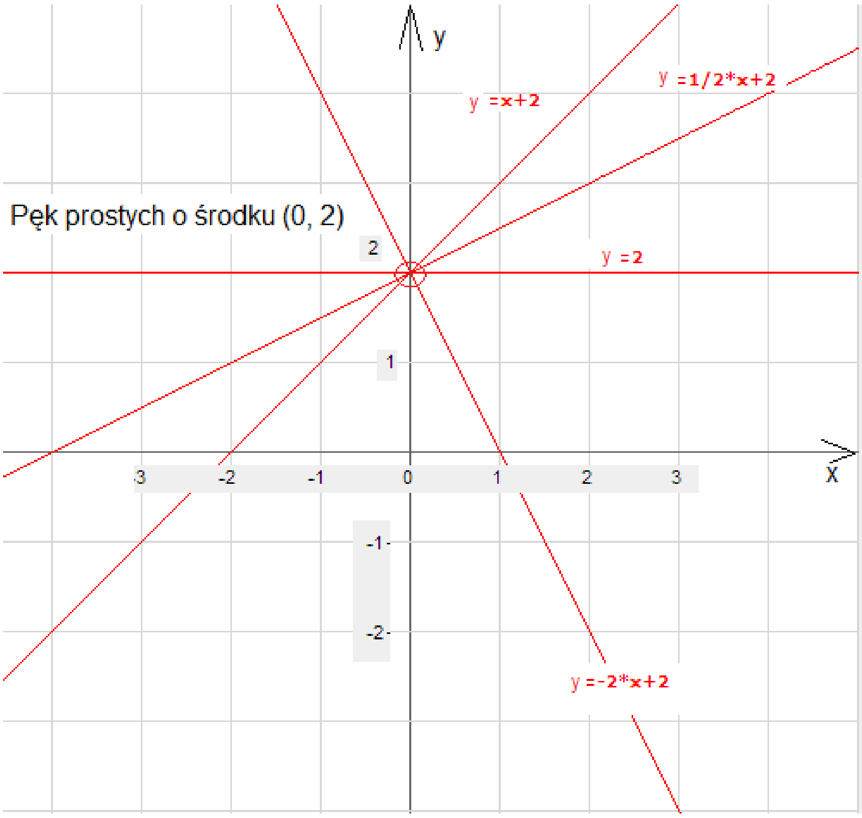
Interpretacja współczynników liczbowych funkcji liniowej

Dla dowolnej funkcji liniowej **f(x) = ax + b**, dla argumentu **x=0**, **f(0) = a*0 + b = b,** czyli punkt **(0, b)** leży na prostej, będącej wykresem funkcji.

Proste o tej samej wartości **b**, tworzą **pęk prostych**

y = a$_1$x + b, y = a$_2$ x + b, y = a$_3$x + b, itd.

Pęk prostych — zbiór wszystkich prostych, przechodzących przez ustalony punkt, który nazywamy **środkiem pęku**,



Wykres funkcji liniowej **y = ax + b**, przechodzi przez punkt **(0, b).**

Współczynnik **b,** to tzw. „wartość funkcji dla argumentu zero”.

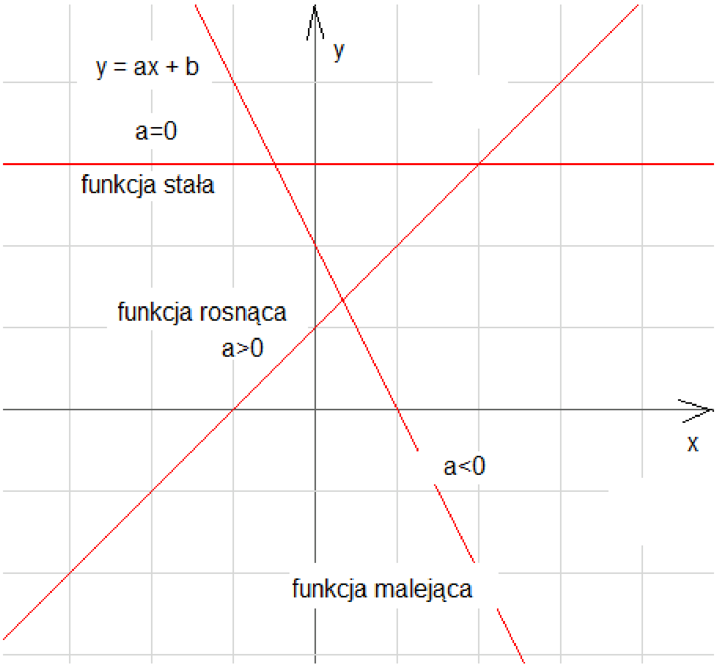
W praktyce może odpowiadać *kapitałowi początkowemu, temperaturze na poziomie 0 nad poziomem morza, zapłacie za przejazd pierwszego kilometra i*tp.

Jeżeli funkcja liniowa określona jest wzorem **y = ax + b,**
to gdy zwiększamy wartość argumentu x o **1**, to wartość funkcji zmienia się o **a**.

Wykres funkcji liniowej **y = ax + b** przechodzi przez punkty **(0, b)** i **(1, a+b)**

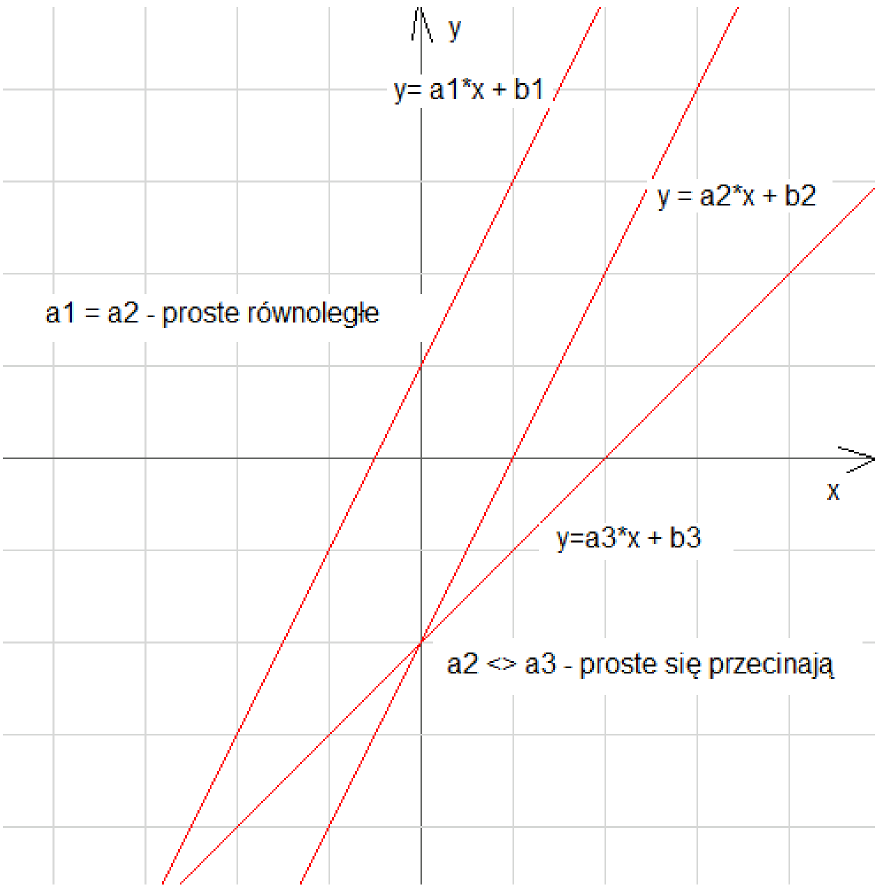
Funkcja linowa **f(x) = ax + b** jest:

rosnąca, gdy **a > 0**, **malejąca**, gdy **a < 0**, **stała**, gdy **a = 0**



Proste <u>równoległe</u> i proste <u>przecinające się</u>

Jeśli $\mathbf{a_1 = a_2}$ – <u>proste **równoległe**</u> jeśli $\mathbf{a_1 \neq a_2}$ – <u>proste się **przecinają**</u>



Zadania praktyczne – wzory

Dane równanie **y = ax +b.**

Wyznaczyć dane do wykreślenia funkcji, określ znaki wartości funkcji

Miejsce zerowe **x_0 = -b/a** jeśli **a <> 0**

P2 = **(x_0, 0),** gdzie **x_0 = -b/a** – miejsce zerowe jeśli a <> 0

Punkt przecięcia prostej z osią y: **P1** = **(0, b)** - punkt na osi y – rzędna b

Współczynnik kierunkowy **a = tg α = a/1** → wektor **[1, a]**

– po osi x wartość 1, a po osy y wartość a

P3 = **(1, a+b)** – punkt należący do prostej, na końcu wektora [**1, a]** wychodzącego z punktu P1=(0, b).

Jeżeli a = p/q to można przyjąć wektor **[1, a]** = **[1, p/q]** - q po osi x, p po osy y lub inny wektor **[p, q],** też leżący na prostej - q po osi x, p po osi y.

Współrzędne punktu **P4** = **(q, p+b).**

Jeśli **a** <> **0** to jest miejsce zerowe **x_0 = -b/a**

Jeśli **a = 0** to prosta równoległa do osi x o równaniu **y = b**

Jeśli **a = 0 i b <> 0** to nie ma miejsc zerowych

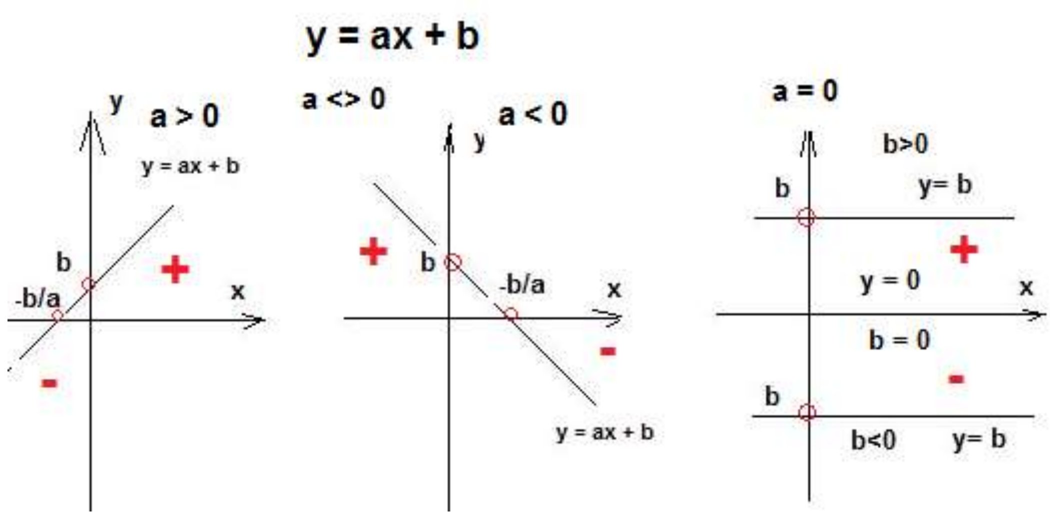
Jeśli **a = 0** i **b = 0** to równanie prostej: **y = 0**

prosta – pokrywa się z osią x – nieskończenie wiele miejsc zerowych

- każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym

Wartości funkcji

1) **a > 0** to **y > 0** dla **x > x_0**, **y < 0** dla **x < x_0**
2) **a < 0** to **y > 0** dla **x < x_0**, **y < 0** dla **x > x_0**
3) **a = 0** – wykres równoległy do osi x



Wyznaczenie równania prostej $y = ax + b$

1 **Dane a i x_0.**

y =ax+b $0 = a*x_0 + b$ **$b = -a*x_0$** **$y = a*x - a*x_0$**

2 Dane **b** prostej k: **y = ax +b** (nieznane **a**)
i równanie prostej l: równoległej do wyznaczanej prostej l: **y = a2*x + b2**

a = a2 y = a*x +b, czyli **y = a2*x + b**

3 Dane: **b** i punkt **P** = **(Xp, Yp),** leżący na prostej

Yp = a*Xp +b a*Xp = Yp – b **a = (Yp – b) / Xp**

y = ax + b **y = (Yp – b) / Xp * x + b**

4 Dane są 2 punkty: **A=(Xa, Ya), B=(Xb, Yb)**

a = (Ya-Yb)/(Xb-Xa) - współczynnik kierunkowy = **tg a**

Ya = a*Xa +b - równanie I → **b = Ya – a*Xa**

Yb = a*Xb +b - równanie II → **b = Yb – a*Xb** y = ax + b lub

--------------- odejmujemy równania: II - I

Yb – Ya = a*(Xb – Xa) → **a = (Ya-Yb)/(Xb-Xa)**

b – 2 sposoby jak wyżej: **b = Ya – a*Xa, b = Yb – a*Xb**
y = (Ya-Yb)/(Xb-Xa) * x + Ya – a*Xa lub

y = (Ya-Yb)/(Xb-Xa) * x + Yb – a*Xb

5 **Dany kąt a i miejsce zerowe Xo**
Xo odpowiada punktowi (Xo, 0)

a = tg a 0 = a*Xa + b → b = -a*Xb y = a*x +b

6 Dany punkt **P=(Xp, Yp)** oraz **kąt** kierunkowy **a**

a = tg a Yp = a*Xp + b → b = Yp – a*Xp **y = a*x +b** **y = a*x + (Yp – a*Xp)**

y = (**tg a**) *x + (Yp – a*Xp)

7 Prosta **p** przechodzi przez punkt **P = (Xp, Yp)** i jest równoległa do prostej o równaniu:

y = a1 * x + b1

a = a1 (proste ||) Yp = a*Xp + b → **b = Yp – a*Xp**

y = a*x + b czyli **y = a1*x + Yp – a*Xp**

8 Napisać równanie prostej, gdy dane miejsce zerowe **x0** oraz **b**

y = ax+b 0 = a*X0 + b a*X0 = -b **a = -b/X0**

y = -b/X0 + b

9 Dany punkt **P (Xp, Yp),** przez który przechodzi prosta **k**
prostopadła do prostej l o równaniu: **y = a2*x + b2**

Wyznaczyć równanie prostej k

y = ax+b   **a = -1/a2**   bo a*a2 = -1

Yp = a*Xp +b →   **b = Yp – a*Xp**

y = ax + b

y = -1/a2 * x + Yp – (-1/a2)*Xp
y = -1/a2 * x + Yp +*Xp/a2

Punkt przecięcia się 2 prostych – wyznaczenie współrzędnych punktu przecięcia:

y = a1*x + b1   - równanie I prostej

y = a2*x + b2   - równanie II prostej

I Metoda tradycyjna

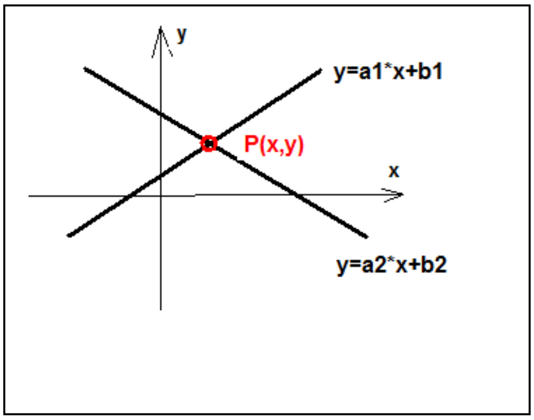
Przyrównujemy równania: y = y, czyli a1*x + b1 = a2*x + b2,
lub odejmujemy stronami – równanie I - równanie II
(odpowiednik metody przeciwnych współczynników – tu odejmowanie zamiast dodawania)
stąd
x*(a1-a2) = b2-b1   → **x = (b2-b1)/(a1-a2) = (b1-b2)/(a2-a1)**

y = a1*x + b1 oraz (dla kontroli) y = a2*x + b2

y = a1*(b2-b1)/(a1-a2) + b1

y = (a1*b2-a2*b1)/(a1-a2) lub

y = (a2*b1-a1*b2)/(a2-a1)



II Metoda wyznacznikowa

a1*x – y = -b1 - postać ogólna I prostej

a2*x – y = -b2 – postać ogólna II prostej

Wx = | - b1 -1 | = b1 – b2
  | -b2 -1 |

Wy = | a1 – b1 = a1*b2 –a1*b1|
  | a2 - b2|

W = |a1 -1| = a2 –a1
  | a2 -1|

x = Wx/W = (b1 – b2) / (a2 – a2) = (b2 – b1) / (a1 – a2)

y = Wy/W = (a2*b1 – a1*b2) /(a2 – a1) = (a1*b2 – a2*b1)/(a1 – a2)

Różne postacie równania prostej

Postać	Równanie	Założenie	Właściwości prostej
Kierunkowa	**y = mx+b** Zwykle **m** oznacza się jako **a** (w tej tabeli a ma inne znaczenie – odcięta punktu przecięcia z osią x)		**m = tg α**- współczynnik kierunkowy **α** –kąt nachylenia prostej do osi x **b** – wyraz wolny – rzędna punktu P1 przeciecia prostej z osią y. **P1 = (0, b).** Jeśli a ≠ 0 to miejsce zerowe **x_o= -b/a** - **punkt P2 = (-b/a, 0)** v1 = **[1, m]** – wektor równoległy do prostej. Przy konstrukcji graficznej, zaczepiamy w punkcie [0,b] P3=(0,b)+[1,m]=(**1,m+b)** – punkt na prostej
Ogólna	**Ax+By+C=0**	A≠0 lub B≠0	Prosta jest prostopadła do wektora [A, B] i przechodzi przez dany punkt P(x_o, y_o); C = -(Ax_o+By_o)
Odcinkowa	**x/a + y/a =1**	a≠0 i b≠0	Prosta odcina na osi x odcinek a (od początku układu), a na osi y odcinek b (od początku układu)
Normalna	**y*sinβ + x*cosβ = d**		Prosta odległa o d od początku układu, a normalna (prostopadła do prostej) tworzy kąt β z osią x
Wyznacznikowa	**|x-xo y-yo|** **| p q | = 0**		Prosta jest || do wektora v=[p, q] i przechpdzi przez dany punkt P(x_o, y_o);
Parametryczna	**x = xo+p*t** **y = yo+p*t**	p≠0 lub q≠0	Prosta jest || do wektora v=[p, q] i przechpdzi przez dany punkt P(x_o, y_o);
Dwupunktowa (dane 2 punkty)	**(x-x1)/(x1-x2)=** **(y-y1)/(y1-y2)**	x1 ≠ x2 y1 ≠ y2	Prosta przechodzi przez 2 dane punkty P1(x1, y1) i P2(x2, y2)
Biegunowa	**r = p/(cosf- b)**	d ≠0	**p** -odległość prostej od bieguna, **b-** kąt między osią biegunową i półprostą poprowadzoną z bieguna prostopadle do danej prostej, **r** – promień - współrzędna odległościowa punktu prostej – odległość od bieguna, **f**- współrzędna kątowa punktu prostej – kątem między osią biegunową i półprostą poprowadzoną z bieguna do danego punktu.

Oznaczenia i związki między parametrami

m = tg α - współczynnik kierunkowy

A, B, C – współczynniki równania w postaci ogólnej

d – odległość prostej od początku układu

n = [A, B] – wektor prostopadły do prostej

v1 = [1, m] - wektor równoległy do prostej

v = [p, q] – wektor równoległy do prostej

a = -C/A – odcinek na osi x od punktu (0,0) do przeciecia z osią x

b = -C/B - odcinek na osi y od punktu (0,0) do przeciecia z osią y – też wyraz wolny równania kierunkowego

m = -b/a = -A/B = q/p = (y2-y1)/(x2-x1) – współczynnik kierunkowy = **tg a**

α –kąt nachylenia prostej do osi x

$\cos\beta = A/(\pm\sqrt{A^2 + B^2})$ **$\sin \beta = B/(\pm\sqrt{A^2 + B^2})$**

$d = |C| / \sqrt{A^2 + B^2} = |b| / \sqrt{1 + m^2}$

Dwie proste leżące na płaszczyźnie:

k1: A1*x +B1*y + C1 = 0 oraz

k2: A2*x + B2*y +C2 = 0

są

- **równoległe, jeśli A1/A2 = B1/B2** (jeśli dodatkowo są równe **C1/C2**, to proste k1 i k2 pokrywają się)

- **przecinają się** w pozostałych przypadkach,
przy czym kąt przeciecia prostych można określić ze wzoru:

tg φ = tg(k1, k2) = (A1*B2-A2*B1/(A1*A2+B1*B2

Odległość punktu P(xo, yo) od prostej k: Ax+By+C = 0 jest równa długości odcinka, którego jednym końcem jest punkt P, a drugim jego rzut prostokatny na prostą k i wyraża się wzorem:

$d(P, k) = |A*xo+Byo+C/| / \sqrt{A^2 + B^2}$

Długość odcinka AB, o współrzędnych A=(xA, yA), B=(xB, yB) wyraża się wzorem:

$d = |AB| = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$

Środek S **odcinka AB** ma współrzędne: **$S = ((x_A+x_B)/2, (y_A+y_B)/2)$**

Punkty i proste na płaszczyźnie - zależności

Zagadnienie	Postać równania prostej		Wzory, uwagi
	ogólna	kierunkowa	
d – odległość punktu P=(xo,yo) od prostej	$d = \|A*xo+Byo+C\| / \sqrt{A^2 + B^2}$ $d = \frac{\|A*xo+B*yo+C\|}{\sqrt{A2+B2}}$	**$d = \|m*x_o+y_o+b\|/\sqrt{1 + m^2}$**	Dla postaci normalnej **$d = \|x_o* \cos\beta+y_o*\sin\beta-d\|$**
Kąt między prostymi, φ	tg φ =(A1*B2-A2*B1/(A1*A2+B1*B2) $tg\ \varphi = \frac{A1*B2-A2*B1}{A1*A2+B1*B2}$	**$tgf= (m_2-m_1)/(1+m_1*m_2)$**	Wzór nie obejmuje prostych prostopadłych
Warunek równoległości 2 prostych	**$A_1*B_{2-} - A_2*B_1=0$**	**m1 = m2**	Dla postaci parametrycznej: **$p_1*q_2 = p_2*q_1$**
Warunek prostopadłości 2 peostych	**$A_1*A_2 + B_1*B2 = 0$**	**m1*m2 = -1** **m2 = -1/m1** **m1 = -1/m2**	Dla postaci parametrycznej **$p_1*p_2 + q_1*q_2 = 0$**