Funkcja liniowa i prosta – podsumowanie

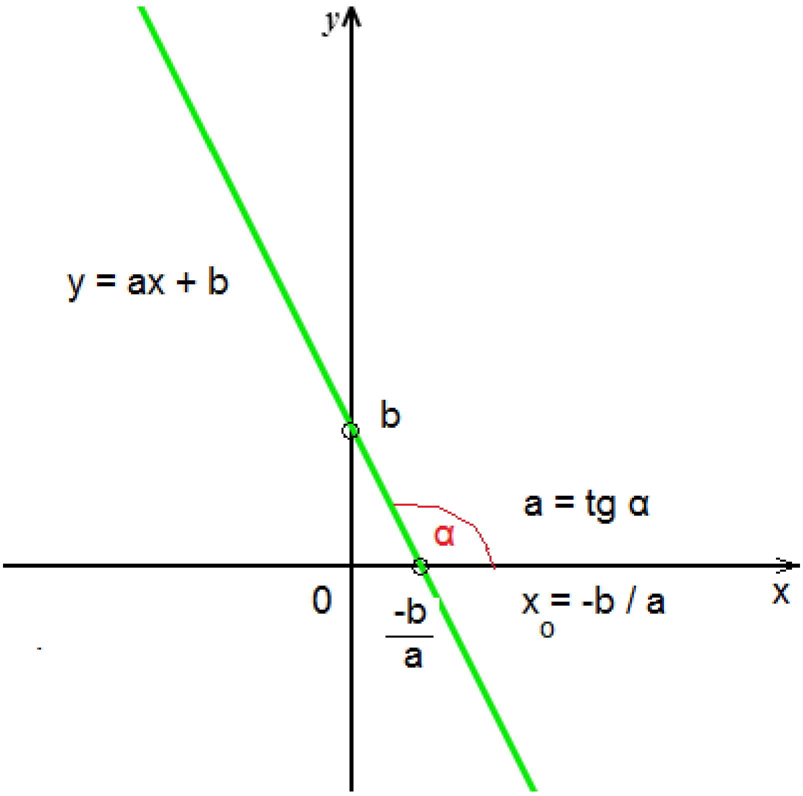
Definicja funkcji liniowej

Funkcja liniowa określona jest wzorem postaci:

y = ax + b , $x \in R$, $a \in R$, $b \in R$
a, **b** – współczynniki funkcji – dowolne liczby rzeczywiste
a- współczynnik kierunkowy – określa kąt nachylenia wykresu względem dodatniego kierunku osi Ox
b – wyraz wolny – określa pionowe przesunięcie wykresu względem początku układu współrzędnych

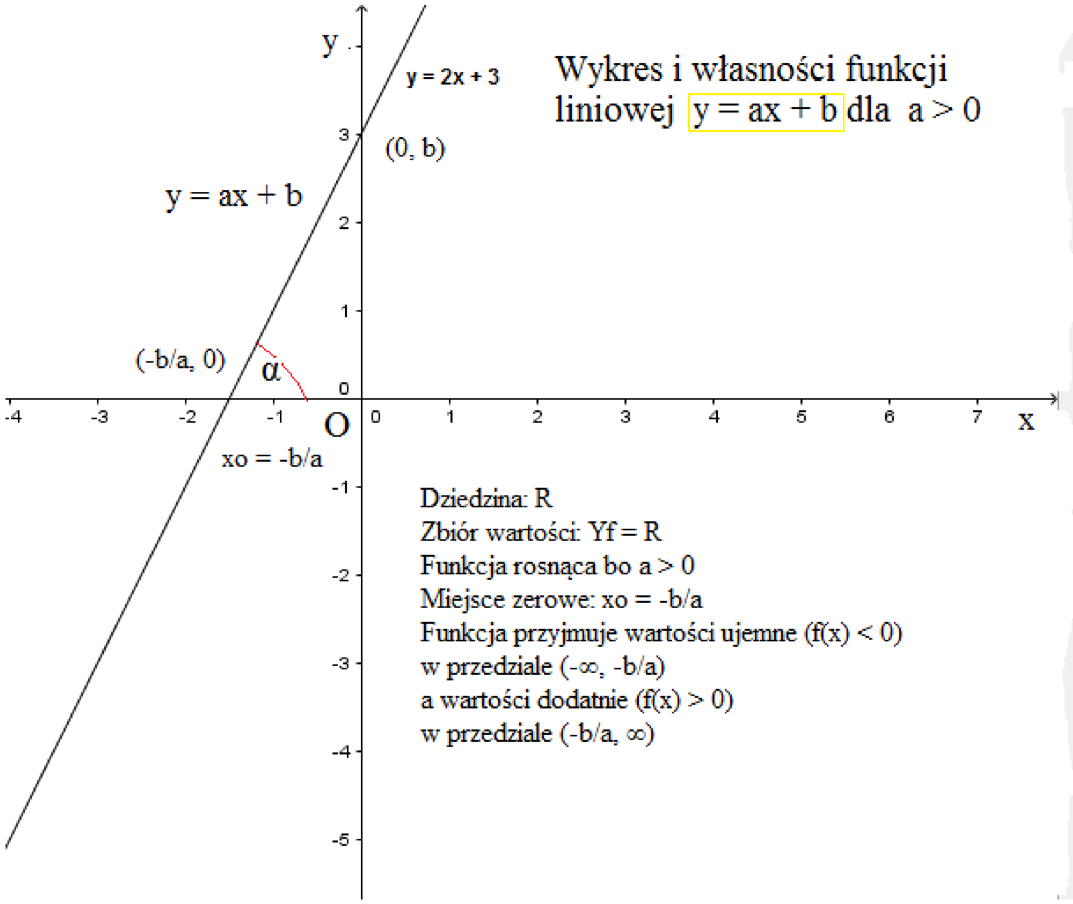
Wykres funkcji liniowej i interpretacja geometryczna współczynników

Wykresem funkcji liniowej jest prosta, która nie jest prostopadła do osi **x** (z definicji funkcji)
Wykresem funkcji liniowej jest prosta o równaniu y = ax +b,
nachylona do osi Ox pod kątem α takim, że tg α = a. Prosta przecina os Oy w punkcie (0, b).



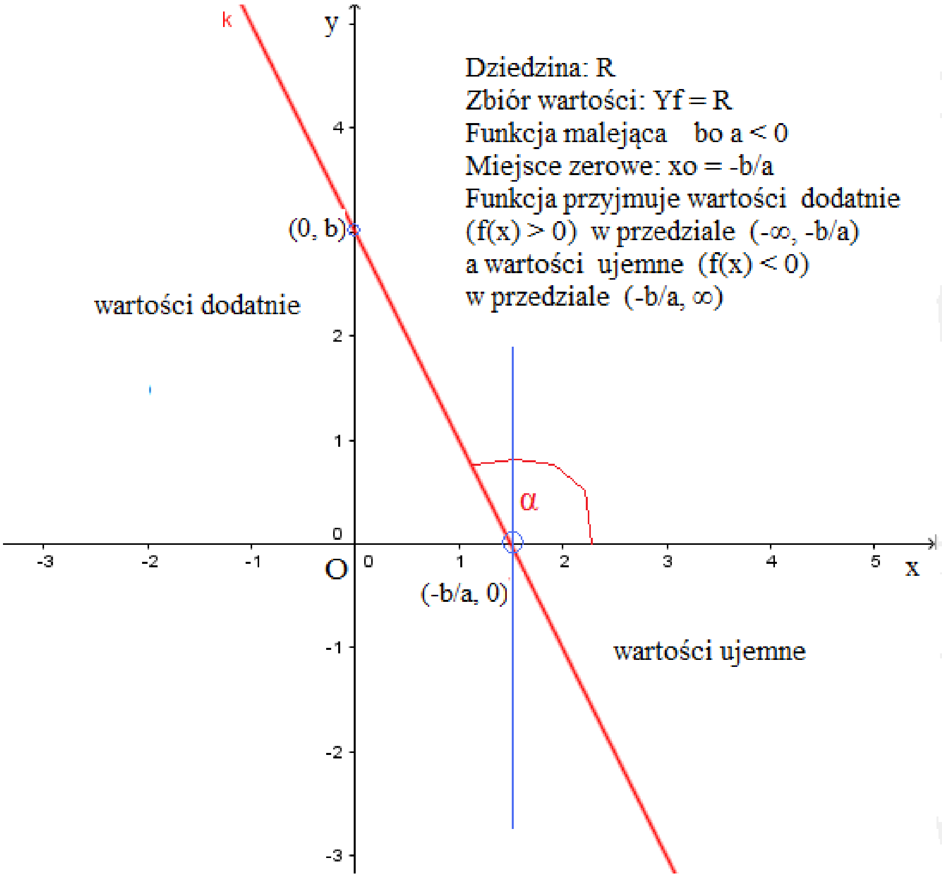
Współczynnik **a** określa kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej (prostej) do osi **Ox**
a = tg α

Współczynnik **b** określa punkt przecięcia (rzędną y) prostej z osią **Oy**
- punkt przecięcia **(0, b)**



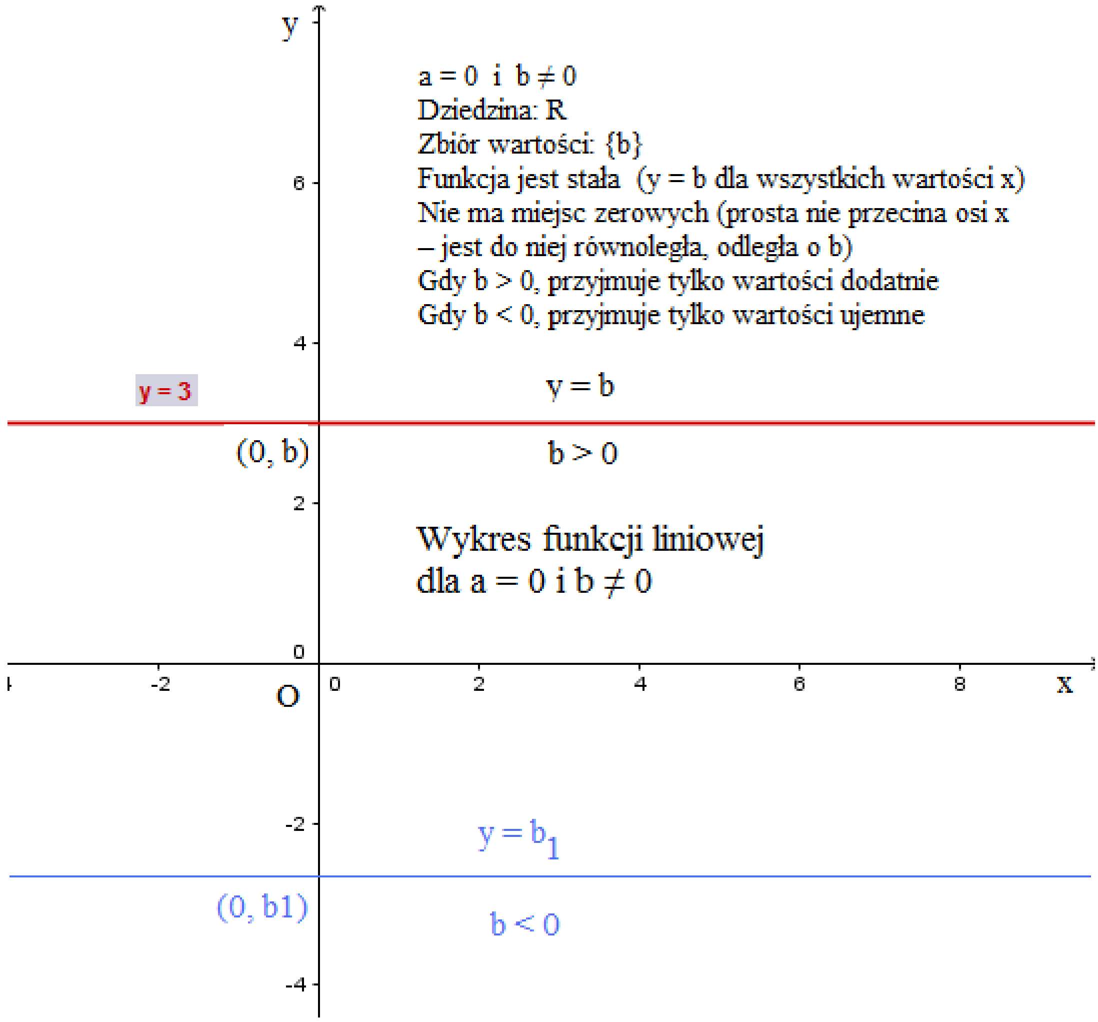
Wykres dla a > 0

Dziedzina: **R**
Zbiór wartości: **Yf = R**
Funkcja rosnąca bo **a > 0**
Miejsce zerowe: $\mathbf{x_o = -b/a}$
Funkcja przyjmuje wartości ujemne (f(x) < 0) w przedziale **(-∞, -b/a)**
a wartości dodatnie (f(x) > 0) w przedziale **(-b/a, ∞)**



Wykres dla a < 0

Dziedzina: **R**
Zbiór wartości: **Yf = R**
Funkcja malejąca bo **a < 0**
Miejsce zerowe: $\mathbf{x_o = -b/a}$
Funkcja przyjmuje wartości dodatnie (f(x) > 0) w przedziale **(-∞, -b/a)**
a wartości ujemne (f(x) < 0) w przedziale **(-b/a, ∞)**



Wykres dla a =0

a = 0 i **b ≠ 0**

Dziedzina: **R**

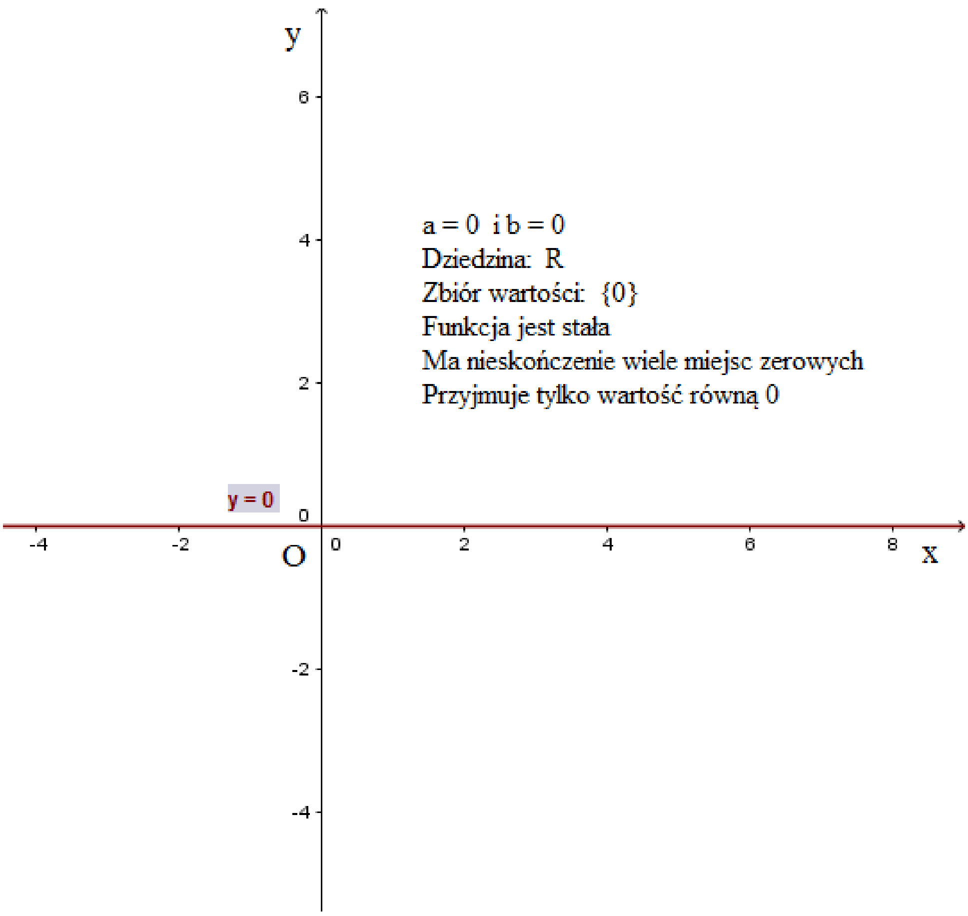
Zbiór wartości: **{b}**

Funkcja jest stała (y = b dla wszystkich wartości x)

<u>Nie ma miejsc zerowych</u> (prosta nie przecina osi x – jest do nie równoległa, odległa o b)

Gdy **b > 0**, przyjmuje tylko wartości dodatnie

Gdy **b < 0**, przyjmuje tylko wartości ujemne



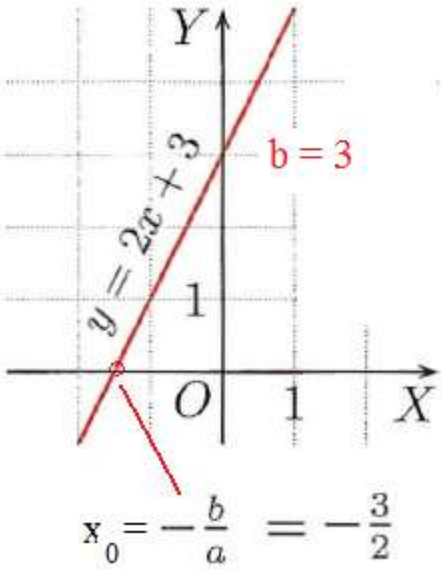
Wykres dla a = 0 i b = 0

a = 0 i b = 0
Dziedzina: **R**
Zbiór wartości: **{0}**
Funkcja jest stała
Ma nieskończenie wiele miejsc zerowych (cała oś x)
Przyjmuje tylko wartość równą **0** (y = 0)

Własności funkcji liniowej

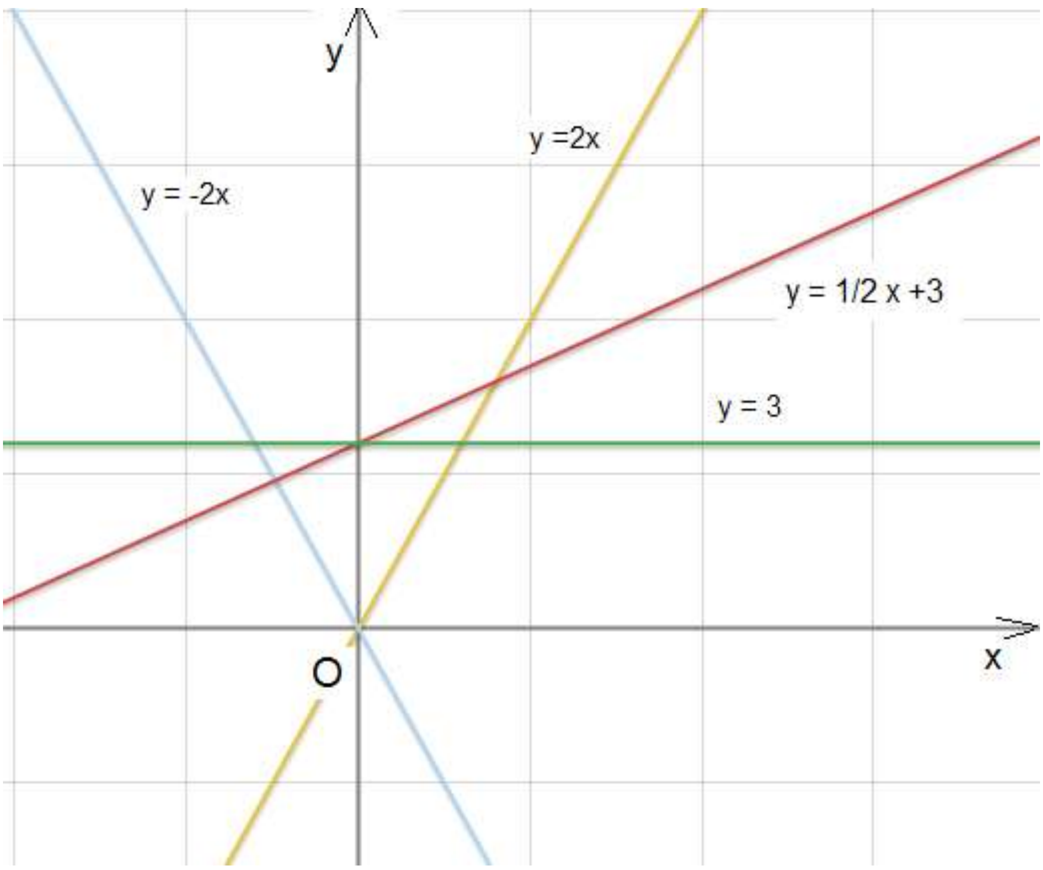
Miejsce zerowe

Jeśli **a ≠ 0** to funkcja liniowa ma jedno miejsce zerowe równe:
x_0 = -b / a - punkt przecięcia prostej z osią Ox o współrzędnych **(-b/a, 0)**
Jeśli **a = 0** i **b = 0** to funkcja ma nieskończenie miejsc zerowych – wykres prostej pokrywa się z osią x
Jeśli **a = 0** i **b = 0** to nie ma miejsc zerowych – wykres prostej równoległy do osi x i nie ma punktów wspólnych z osią x



Monotoniczność

Jeśli **a > 0** to funkcja liniowa jest **rosnąca**
Jeśli **a < 0** to funkcja liniowa jest **malejąca**
Jeśli **a = 0** to funkcja jest **stała** (prosta || do osi x)

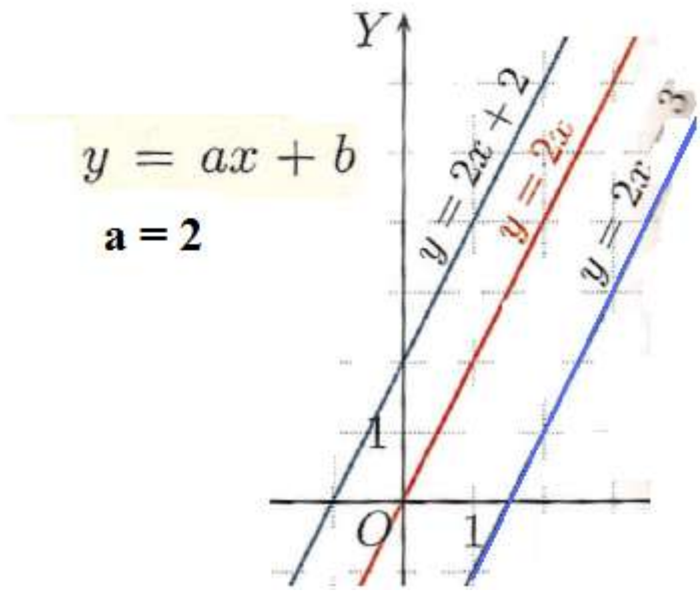


Położenie wykresu funkcji liniowej

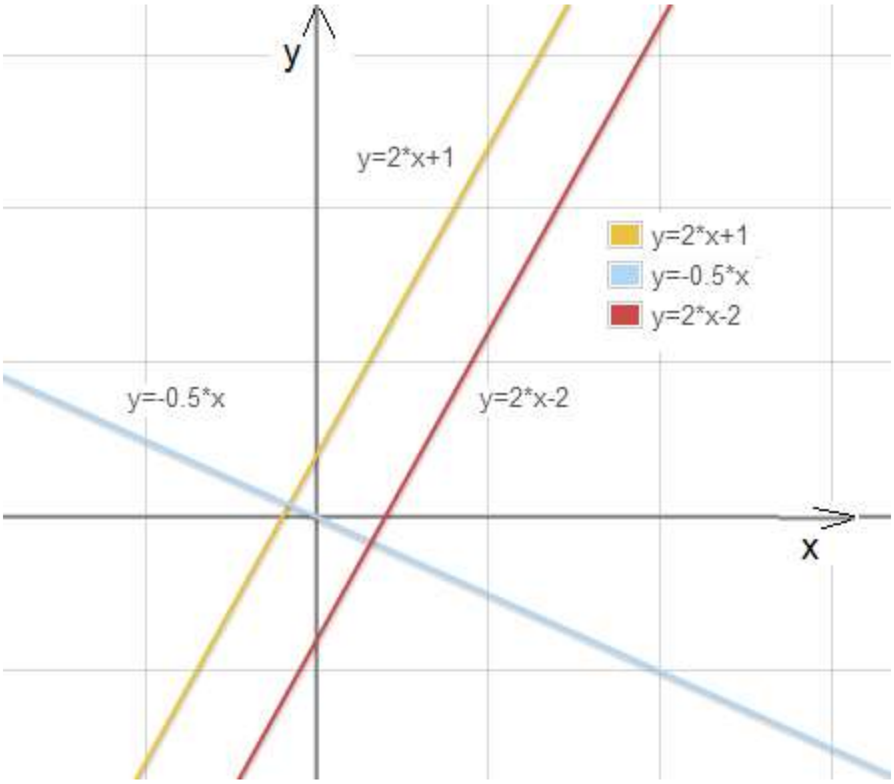
Wykres funkcji **$y = ax$** przechodzi przez początek układu współrzędnych (b=0)
Wykres funkcji **$y = b$** jest równoległy do osi y

Wykresy równoległe i prostopadłe

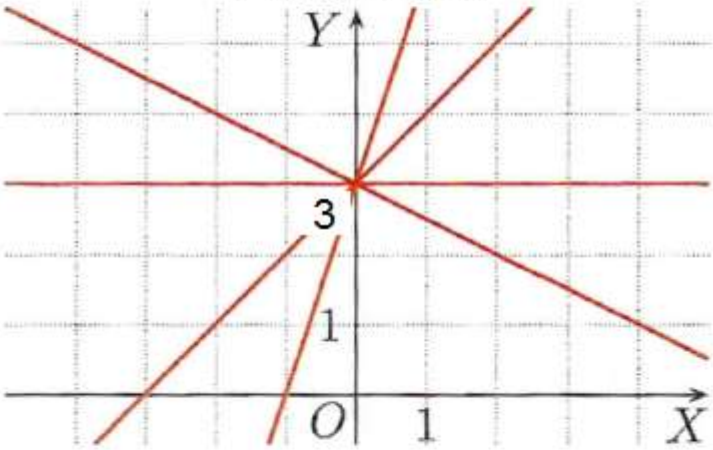
Wykresy 2 funkcji liniowych:
$y = a_1 x + b_1$ i $y = a_2 x + b_2$
są do siebie równoległe, gdy **$a_1 = a_2$**



Wykresy 2 funkcji liniowych
$y = a_1 x + b_1$ i $y = a_2 x + b_2$
są do siebie prostopadłe, gdy **$a_1 = -1 / a_2$** (**$a1 * a2 = -1$**)



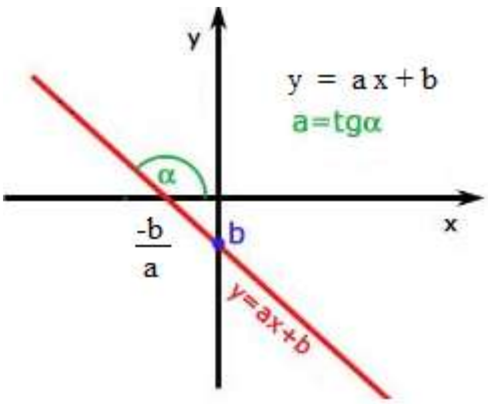
Pęk prostych



Prosta

Równanie prostej na płaszczyźnie

Równanie postaci **y = ax + b** nazywamy **równaniem kierunkowym** prostej
Prosta prostopadła do osi OX nie ma równania kierunkowego.



a ≠ 0 - współczynnik kierunkowy, a = tg α
b – wyraz wolny
(0, b) – punkt przecięcia prostej z osią OY
(-b/a, 0) – punkt przecięcia prostej z osią OX

Równanie prostej przechodzącej przez 2 punkty: A=(x1, y1) i B = (x2, y2)

Wyprowadzenie wzoru z układu równań – do równań **y = ax +b** podstawione współrzędne punktów A=(x1, y1) oraz B = (x2, y2)

{ y1 = a* x1 + b

{ y2 = a*x2 + b po odjęciu stronami:

y2 – y1 = a*(x2 – x1)

a = (y2-y1) / (x2 – x1) - współczynnik kierunkowy prostej

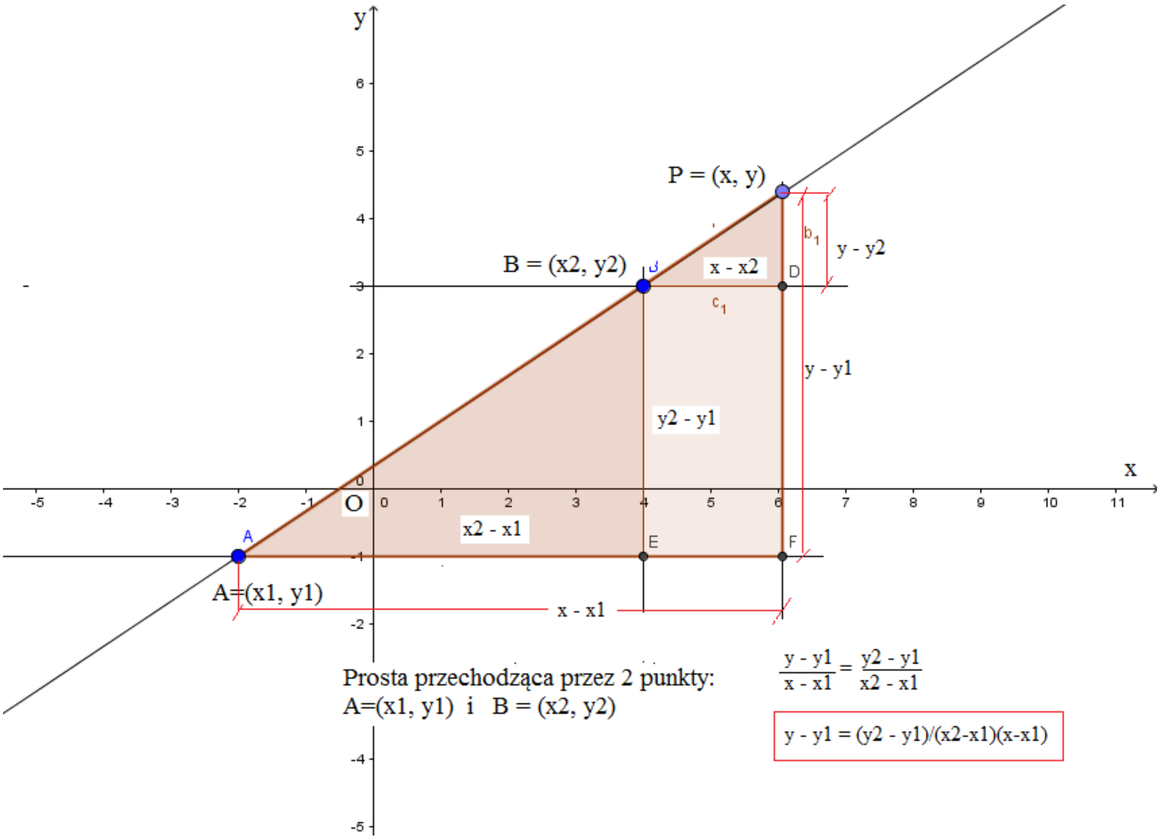
b = y1 – a*x1 = y1 – (y2-y1)/(x2-x1)*x1

y = a*x + b = a*x + y1 – a*x1 = a(x-x1) + y1; czyli

y = a(x-x1) + y1 lub **y = a(x-x2) + y2**

y = (y2-y1)/(x2-x1)*x - (y2-y1)*(x2-x1) *x1 + y1 = (y2-y1)/(x2-x1)*(x-x1) + y1

y = (y2-y1)/(x2-x1)*(x-x1) + y1 lub **y = (y2-y1)/(x2-x1)*(x-x2) + y2**



Wyprowadzenie wzorów na podstawie rysunku – podobieństwo trójkątów – równaość **a**

(y – y1)/(x-x1) = (y2-y1)/(x2-x1) = a

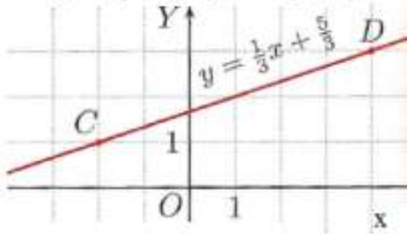
y – y1 = (y2-y1)/(x2-x1)*(x-x1) →

y = (y2-y1)/(x2-x1)*(x-x1) + y1 lub **y = (y2-y1)/(x2-x1)*(x-x2) + y2**

y = a*(x-x1) + y1 lub **y = a(x-x2) + y2**

Przykład:

równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(-2,1)$ i $D(4,3)$



Aby wyznaczyć współczynniki a, b równania $y = ax + b$, rozwiązujemy układ równań:

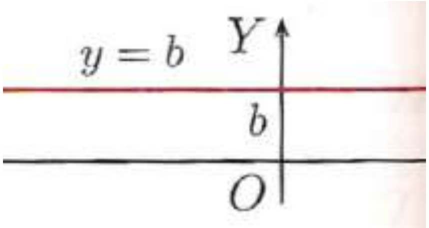
$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-2) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases}$$

równania układu otrzymujemy, podstawiając współrzędne punktów C i D do równania $y = ax + b$

Otrzymujemy $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.

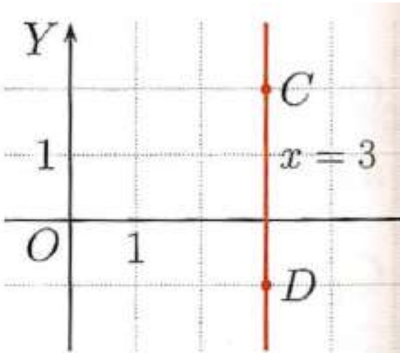
Ze wzorów:
a = (3-1)/(4 +2) = 2/6 = 1/3
y = a*(x-x1) + y1 = 1/3(x+2) + 1 = 1/3*x + 2/3 + 1 = 1/3*x + 5/3

Prosta pozioma - a = 0



Równanie prostej równoległej dom osi x**: y = b**

Prosta pionowa – nie spełnia warunku funkcji (jedna, jednoznaczna wartość dla każdego x)



Równanie prostej prostopadłej do osi x: **$x = x_o$**

Dla uogólnienia i umożliwienia zapisu równania każdej prostej na płaszczyźnie, stosuje się **równanie ogólne prostej.**

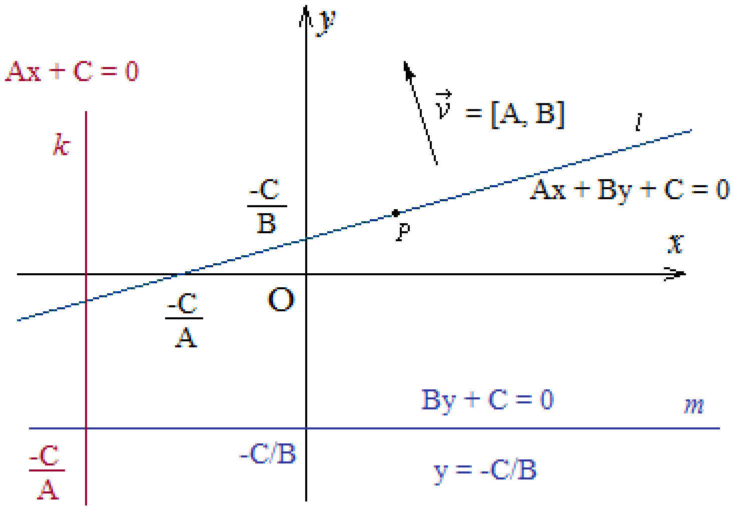
Równanie ogólne prostej

Ax + By + C = 0 A ≠ 0 lub B ≠ 0

A, B, C – współczynniki liczbowe
[A, B] – współrzędne
A, B, C Î R i liczby A, B nie są jednocześnie równe zero.

Równanie każdej prostej, również równoległej dom osi y można zapisać w postaci ogólnej

Równanie ogólne prostej



Przekształcenie równania w postaci ogólnej do postaci kierunkowej

y = -A/B * x -C/B → a = -A/B,   b = -C/B

Prosta przechodząca przez 2 punkty w postaci ogólnej

| $x - x_A$ $y - y_A$ |

| $x_B - x_A$ $y_B - y_A$ | = 0

$(x - x_A) * (y_B - y_A) - (y - y_A) (x_B - x_A) = 0$

$(y_B - y_A)*x - (x_B-x_A)*y + y_B*(x_B-x_A) - x_A*(y_B-y_A) = 0$

$A = y_B - y_A$. $B = -(x_B-x_A)$, $C = y_B*(x_B-x_A) - x_A*(y_B-y_A)$

Ax + By + C = 0

Współczynnik kierunkowy prostej

a = (y2 – y1) / (x2 – x1)

Dowód:

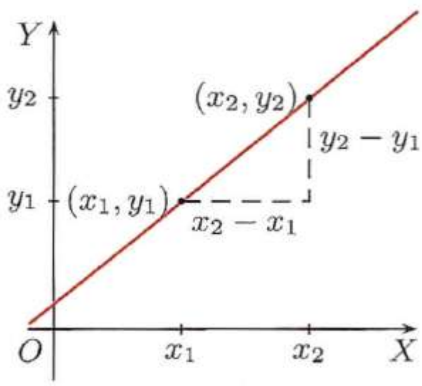
Podstawiamy współrzędne punktów (x1, y1) i (x2, y2) do równania prostej i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases} \quad \text{gdzie } x_1 \neq x_2$$

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \text{skąd } a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

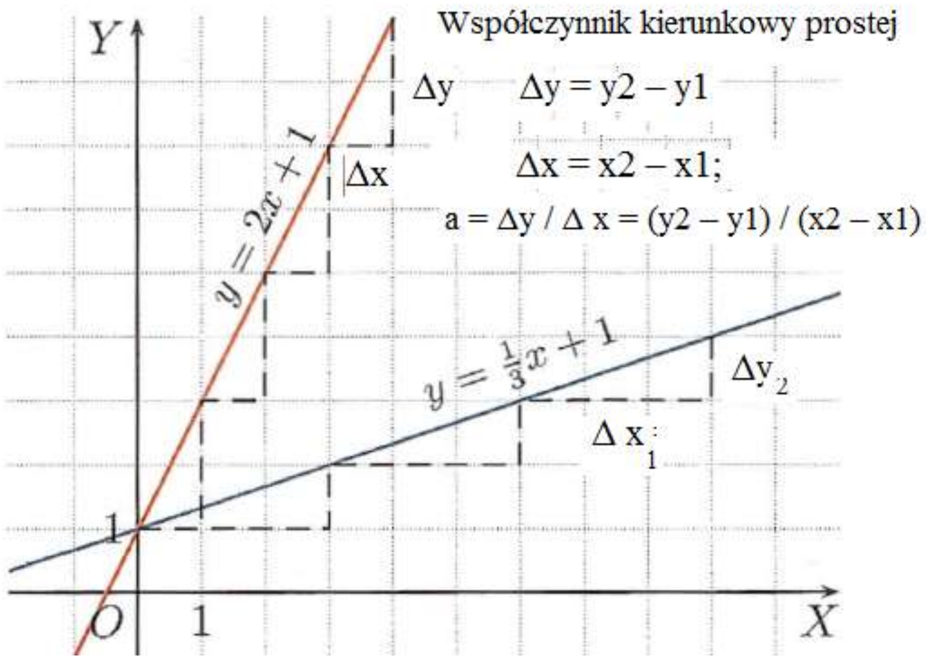


Interpretacja współczynnika kierunkowego

Współczynnik kierunkowy prostej pozwala określić jak prosta jest „stroma”.
Na przykład dla prostej $y = 2x + 1$, wzrostowi argumentu o **1** odpowiada przyrost wartości funkcji o **2** ,
a dla prostej $y = \frac{1}{2} x + 1$, wzrostowi argumentu o **3** jednostki odpowiada przyrost funkcji o **1** (jedną jednostkę).

Ogólnie możemy przedstawić a jako stosunek **Δy** do **Δx,** gdzie Δx to przyrost argumentu x, a Δy to przyrost funkcji dla przyrostu argumentu.
Δx = x2 – x1;   Δy = y2 – y1,

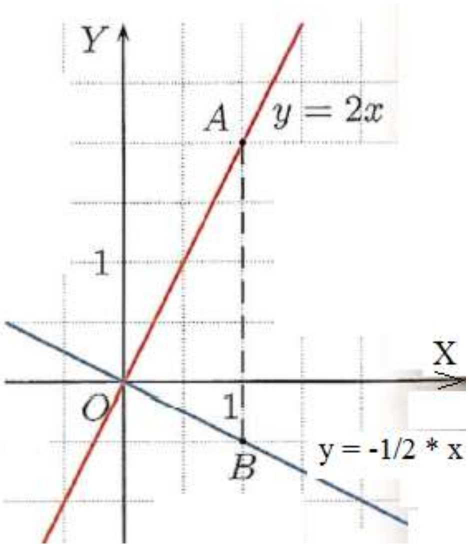
a = Δy / Δ x = (y2 – y1) / (x2 – x1)



Warunek prostopadłości prostych

Prosta pierwsza: $\mathbf{y = a_1x + b_1}$ $\mathbf{(a_1 \neq 0)}$
Prosta druga: $\mathbf{y = a_2x + b_2}$ $\mathbf{(a_2 \neq 0)}$
są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{a_2 = -1/a_1}$, czyli $\mathbf{a_1 * a_2 = -1}$
lub $a_1 = -1/ a_2$
Jeżeli jedną prostą zapiszemy w postaci: $y = ax + b$, a inną w postaci $y = a_1x + b_1$ $(a_1 \neq 0)$
to aktualny jest zapis: $\mathbf{a_1 = -1/a}$, czyli $\mathbf{a_1 * a = -1}$

Przykład



Układy równań liniowych

Układ 2 równań liniowych z 2 niewiadomymi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & a_1 \neq 0 \ \text{ lub } \ b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y = c_2 & a_2 \neq 0 \ \text{ lub } \ b_2 \neq 0 \end{cases}$$

Układ można rozwiązać
metodą podstawiania (obliczamy jedną niewiadomą z jednego równania i podstawiamy do drugiego)
metodą przeciwnych współczynników
metodą wyznacznikową
metodą graficzną – narysować 2 proste i znaleźć przecięcie

Układ równań, którego rozwiązaniem jest jedna para liczb, nazywamy **układem oznaczonym**.
Układ równań, który nie ma rozwiązań, nazywamy **układem sprzecznym**.
Układ równań liniowych, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem nieoznaczonym**

Przykład zastosowania metody podstawiania

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

z pierwszego równania wyznaczamy niewiadomą y

w drugim równaniu zamiast y podstawiamy $-x-3$

y = -x -3
3x - 2(-x -3) = -4
3x +2x +6 = -4
5x = -10 / :5
x = -2
y = 2 -3 = -1

Sprawdzenie:

Podstawiamy x i y do wyjściowego układu równań

-2 -1 = -3
3*(-2) -2*(-1) = -6 +2 = -4

Przykład zastosowania metody przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} x - 4y = 4 \\ -2x + 5y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y = \ \ 4 \ / \cdot 2 \\ -2x + 5y = -2 \end{cases}$$

mnożymy obie strony równania przez 2 aby otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej x

$$\begin{cases} 2x - 8y = \ \ 8 \\ -2x + 5y = -2 \end{cases}$$

dodajemy równania stronami

$$-3y = 6$$

y = 6 / (-3) = -2

Podstawiamy wartość y do równania x - 4y = 4
x - 4*(-2) = 4
x = 4 -8 = -4
Rozwiązanie: x = -4, y =-2

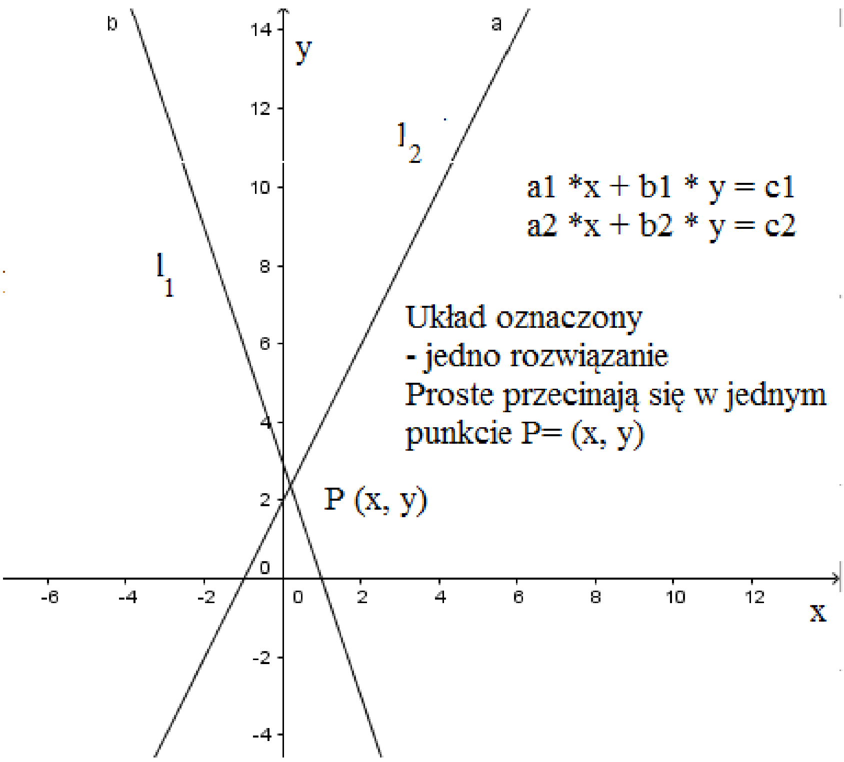
Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

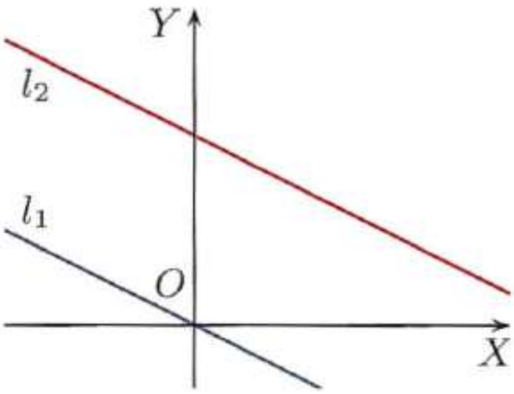
Proste l_1 i l_2 opisane równaniami układu:

$a_1 x + b_1 y = c_1$

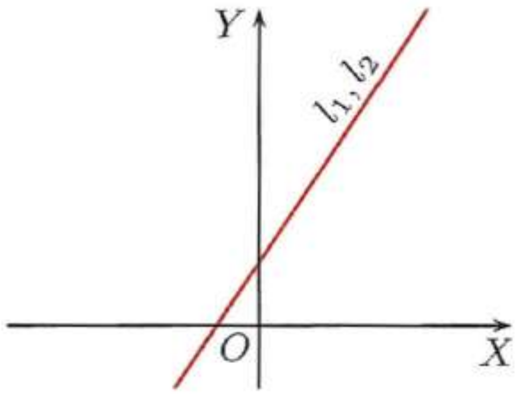
$a_2 x = b_2 y = c_2$

Może zachodzić jedna z poniższych 3 sytuacji:





Układ sprzeczny (nie ma rozwiązań) – proste są równoległe i różne.



Układ nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań) – proste pokrywają się.

Punkt przecięcia się 2 prostych – wyznaczenie współrzędnych punktu przecięcia

– wyprowadzenie wzorów bezpośrednich, gdy znane współczynniki układów równań w postaci kierunkowej :

$\mathbf{y = a_1 * x + b_1}$ - równanie I prostej

$y = a_2 {*} x + b_2$ - równanie II prostej

I Metoda tradycyjna

Przyrównujemy równania: y = y, czyli $a_1 {*} x + b_1 = a_2 {*} x + b_2$,

lub odejmujemy stronami – równanie I - równanie II

(odpowiednik metody przeciwnych współczynników – tu odejmowanie zamiast dodawania)

stąd

x*(a1-a2) = b2-b1 →

$x = (b_2 - b_1) / (a_1 - a_2) = (b_1 - b_2) / (a_2 - a_1)$

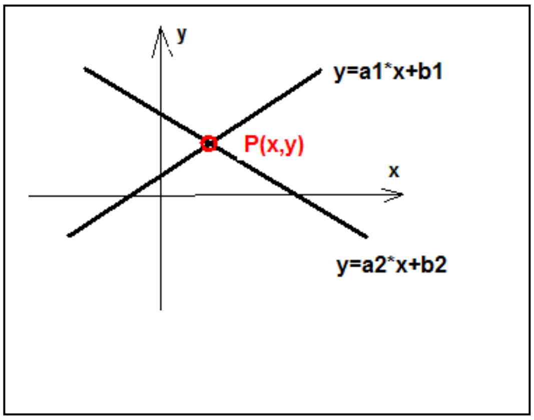
y = a1*x + b1 oraz (dla kontroli) y = a2*x + b2

y = a1*(b2-b1)/(a1-a2) + b1

$y = (a_1 {*} b_2 - a_2 {*} b_1)$ / $(a_1 - a_2)$

lub

$y = (a_2 {*} b_1 - a_1 {*} b_2) / (a_2 - a_1)$



II Metoda wyznacznikowa

a1*x – y = -b1 - postać ogólna I prostej

a2*x – y = -b2 – postać ogólna II prostej

Wx = | - b1 -1 | = b1 – b2

| -b2 -1 |

Wy = | a1 – b1 = a1*b2 –a1*b1|

| a2 - b2|

W = |a1 -1| = a2 –a1

| a2 -1|

$x = Wx/W = (b_1 - b_2) / (a_2 - a_2) = (b_2 - b_1) / (a_1 - a_2)$

$y = Wy/W = (a_2 {*} b1 - a_1 {*} b_2) /(a_2 - a_1) = (a_1 {*} b_2 - a_2 {*} b_1)/(a_1 - a_2)$

Różne postaci równania prostej

Postać	Równanie	Założenie	Właściwości prostej

Kierunkowa	**y = mx+b** Zwykle **m** oznacza się jako **a** (w tej tabeli a ma inne znaczenie – odcięta punktu przecięcia z osią x)		**m = tg α-** współczynnik kierunkowy **α** –kąt nachylenia prostej do osi x **b** – wyraz wolny – rzędna punktu P1 przeciecia prostej z osią y. **P1 = (0, b).** Jeśli a ≠ 0 to miejsce zerowe **x_o= -b/a** - **punkt P2 = (-b/a, 0)** v1 = **[1, m]** – wektor równoległy do prostej. Przy konstrukcji graficznej, zaczepiamy w punkcie [0,b] P3=(0,b)+[1,m]=(**1,m+b)** – punkt na prostej
Ogólna	**Ax+By+C=0**	A≠0 lub B≠0	Prosta jest prostopadła do wektora [A, B] i przechodzi przez dany punkt P(x_o, y_o); C = -(Ax_o+By_o)
Odcinkowa	**x/a + y/a =1**	a≠0 i b≠0	Prosta odcina na osi x odcinek a (od początku układu), a na osi y odcinek b (od początku układu)
Normalna	**y*sinβ + x*cosβ = d**		Prosta odległa o d od początku układu, a normalna (prostopadła do prostej) tworzy kąt β z osią x
Wyznacznikowa	**|x-xo y-yo|** **| p q | = 0**		Prosta jest || do wektora v=[p, q] i przechpdzi przez dany punkt P(x_o, y_o);
Parametryczna	**x = xo+p*t** **y = yo+p*t**	p≠0 lub q≠0	Prosta jest || do wektora v=[p, q] i przechpdzi przez dany punkt P(x_o, y_o);
Dwupunktowa (dane 2 punkty)	**(x-x1)/(x1-x2)=** **(y-y1)/(y1-y2)**	x1 ≠ x2 y1 ≠ y2	Prosta przechodzi przez 2 dane punkty P1(x1, y1) i P2(x2, y2)
Biegunowa	**r = p/(cosf- b)**	d ≠0	**p** -odległość prostej od bieguna, **b-** kąt między osią biegunową i półprostą poprowadzoną z bieguna prostopadle do danej prostej, **r** – promień - współrzędna odległościowa punktu prostej – odległość od bieguna,

			f- współrzędna kątowa punktu prostej – kątem między osią biegunową i półprostą poprowadzoną z bieguna do danego punktu.

Oznaczenia i związki między parametrami

m = tg α - współczynnik kierunkowy

A, B, C – współczynniki równania w postaci ogólnej

d – odległość prostej od początku układu

n = [A, B] – wektor prostopadły do prostej

v1 = [1, m] - wektor równoległy do prostej

v = [p, q] – wektor równoległy do prostej

a = -C/A – odcinek na osi x od punktu (0,0) do przeciecia z osią x

b = -C/B - odcinek na osi y od punktu (0,0) do przeciecia z osią y – też wyraz wolny równania kierunkowego

m = -b/a = -A/B = q/p = (y2-y1)/(x2-x1) – współczynnik kierunkowy = **tg a**

α –kąt nachylenia prostej do osi x

$\cos\beta = A/(\pm\sqrt{(A^2 + B^2)}$ $\sin \beta = B/(\pm\sqrt{(A^2 + B^2)}$

$d = |C| / \sqrt{(A^2 + B^2)} = |b| / \sqrt{(1 + m^2)}$

Dwie proste leżące na płaszczyźnie:

k1: A1*x +B1*y + C1 = 0 oraz

k2: A2*x + B2*y +C2 = 0

są

- **równoległe**, **jeśli A1/A2 = B1/B2** (jeśli dodatkowo są równe **C1/C2**, to proste k1 i k2 pokrywają się)

- **przecinają się** w pozostałych przypadkach,

przy czym kąt przeciecia prostych można określić ze wzoru:

tg φ = tg(k1, k2) = (A1*B2-A2*B1/(A1*A2+B1*B2

Odległość punktu P(xo, yo) od prostej k: Ax+By+C = 0 jest równa długości odcinka, którego jednym końcem jest punkt P, a drugim jego rzut prostokatny na prostą k i wyraża się wzorem:

$d(P, k) = |A*xo+Byo+C/| / \sqrt{(A^2 + B^2)}$

Długość odcinka AB, o współrzędnych A=(xA, yA), B=(xB, yB) wyraża się wzorem:

$d = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Środek S **odcinka AB** ma współrzędne: **$S = ((x_A+x_B)/2, (y_A+y_B)/2)$**

Punkty i proste na płaszczyźnie - zależności

Zagadnienie	Postać równania prostej		Wzory, uwagi
	ogólna	kierunkowa	
d – odległość punktu P=(xo,yo) od prostej	$d = \|A*xo+Byo+C\| / \sqrt{A^2 + B^2}$ $d = \frac{\|A*xo+B*yo+C\|}{\sqrt{A2+B2}}$	**$d = \|m*x_o+y_o+b\|/\sqrt{1 + m^2}$**	Dla postaci normalnej **$d = \|x_o* \cos\beta+y_o*\sin\beta-d\|$**
Kąt między prostymi, φ	tg φ =(A1*B2-A2*B1/(A1*A2+B1*B2) $tg\ \varphi = \frac{A1*B2-A2*B1}{A1*A2+B1*B2}$	**$tgf= (m_2-m_1)/(1+m_1*m_2)$**	Wzór nie obejmuje prostych prostopadłych
Warunek równoległości 2 prostych	**$A_1*B_2 - A_2*B_1=0$**	**m1 = m2**	Dla postaci parametrycznej: **$p_1*q_2 = p_2*q_1$**
Warunek prostopadłości 2 peostych	**$A_1*A_2 + B_1*B2 = 0$**	**m1*m2 = -1** **m2 = -1/m1** **m1 = -1/m2**	Dla postaci parametrycznej **$p_1*p_2 + q_1*q_2 = 0$**