Ciągi liczbowe

Spis treści

Ciąg liczbowy

Ciąg jest to funkcja, której **dziedziną** jest zbiór liczb naturalnych dodatnich N^+ - **ciąg liczbowy nieskończony**
lub jego skończony podzbiór początkowy *(1, 2, …n)* – **ciąg liczbowy skończony** – n-elementowy.
Terminu ciąg bez dalszego określenia używamy w znaczeniu ciąg nieskończony.

Ciąg liczbowy skończony – funkcja określona w zbiorze liczb {1, 2, … n} o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.
Najczęściej funkcje będące ciągami oznaczamy małymi literami alfabetu łacińskiego: a, b, c, d.
Zapisy **a(n), b(n), c(n), d(n)** oznaczają funkcje a, b, c, d, zmiennej n, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią.
Przyjęto poniższe oznaczenia dla opisu funkcji, które są ciągami:

a(n) = a_n - oznacza, że $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$, … $a(n) = a_n$
a_1, a_2, a_3, a_4, … a_n - oznacza wartości funkcji nazywane wyrazami ciągu liczbowego
a(n) – a_n - oznacza wzór na wyraz n-ty ciągu lub wyraz ogólny ciągu, lub wzór ciągu, inaczej wzór funkcji a zmiennej n
(a_1, a_2, … a_{n-1}, a_n) lub **(a_n)** - oznacza ciąg a_n

Przykłady:

1) Kolejne liczby naturalne 2-cyfrowe 10, 11, 12, .. 98, 99 tworzą skończony ciąg liczbowy (10, 11, 12, …99), w którym:

$a_1 = 10, a_2 = 11, a3 = 12, \dots a_{89} = 98, a_{90} = 99,$
czyli $a_n = n + 9$, gdzie $n \in \{1, 2, \dots 99\}$

2) (an) = (4, 7, 10, 13, 16, 19) a1= 4, a2 = 7, a3 = 10, a4 = 13, a5 = 16, a6 = 19
$a1 = 4$, $a_n = a_{n-1} + 3$ (lub $a_{n+1} = a_n+3$), $n \in \{1, \dots 10\}$
$a_n = a1+3*(n-1)$

Ciąg liczbowy nieskończony – funkcja a określona na zbiorze liczb naturalnych dodatnich N^+, o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych R o oznaczamy (an) lub $(a_1, a_2, a_3, \dots)$
N przykład kolejne liczby naturalne 1, 2, 3, … tworzą nieskończony ciąg liczbowy (a_n), w którym *n-ty* wyraz ciągu a_n określony jest wzorem $a_n = n$
a1, a2, a3, …. – kolejne wyrazy ciągu (a_n)
a_n - n-ty wyraz ciągu a_n

Przykłady:

1) Pierwszy wyraz ciągu jest równy 5, a każdy następny jest 3 razy większy niż poprzedni:
a1 = 5, a2 = 3*5 = 15, a3 = 3*15 = 45, a4 = 3*45 = 135 → a1= 5, $a_n = 5*a_{n-1}$
a2 = 3*a1, a3= 3* 3*a1, a4 = 3 * 3*3*a1 → a_n= 3^(n-1)*5 = $3^{(n-1)}*a1 = 3^{(n-1)}*5$

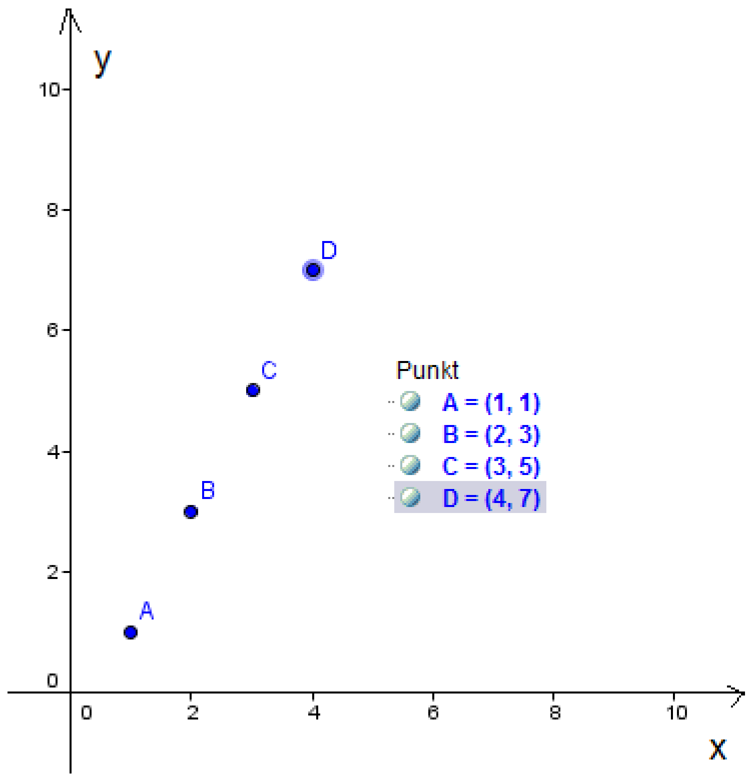
2) **Obliczenie kolejnych przybliżeń liczby √2 według reguły Pitagorasa**:
$P_1 = 3/2$
$P_2 = (3+2*2)/(3+2) = 7/5$;
$P_3 = (7+2*5)/(7+5) = 17/12$
$P_4 = (17+2*12)/(17+12) = 41/29$
$P_5 = (41+2*29)/(41+29)$
……
$\mathbf{P_n = (L_{n-1} + 2*M_{n-1})/(L_{n-1} + M_{n-1})}$
Gdzie $\mathbf{L_{n-1}}$ - licznik przybliżenia P_{n-1}, $\mathbf{M_{n-1}}$ – mianownik przybliżenia P_{n-1}

Przykłady i sposoby określania ciągu, suma n początkowych wyrazów ciągu

Ciąg liczbowy można określić tak jak każdą funkcję, z tym, że jego dziedziną jest zbiór lub podzbiór liczb naturalnych.
Ciąg uważa się za określony, jeżeli znamy przepis, według którego można wyznaczyć kolejne jego wyrazy.
Prawo tworzenia wyrazów ciągu można podać w postaci przepisu słownego lub wzoru.

Przykłady

1) Dn = {1, 2, 3, 4}; $f(x) = 2x - 1$; $x \in \{1, 2, 3, 4\}$



2) Dn = {1, 2, 3, 4, ...}; f(x) = 2x -1; x ∈ N^+
Wykres jak wyżej poszerzony o kolejne punkty: $a_n = 2n - 1$; n ∈ N^+ .

Wykresem funkcji f, gdy x ∈ N^+ jest zbiór punktów, których odcięte się liczbami naturalnymi dodatnimi.

3) Wypisz 5 początkowych wyrazów ciągu, jeżeli jego n-ty wyraz określony jest wzorem:
$a_n = -n^2 + 1$
a1 = -1 +1 = **0**; a2 = -2^2 + 1 = **-3**; a3 = -9+1 = **-8**; a4 = -16+1 = **-15**; a5 = -25+1 = **-24**
$(a_n) = (0, -3, -8, -15, -24)$

Wśród ciągów liczbowych można wyróżnić ciągi: rosnące, niemalejące, malejące, nierosnące, stałe. Jeżeli ciąg jest rosnący, niemalejący, malejący, nierosnący albo stały to taki ciąg jest **monotoniczny**.

Suma n początkowych wyrazów ciągu

Suma n początkowych wyrazów ciągu (an) jest wyrażenie:
$\mathbf{Sn = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + a_n}$, gdzie n ∈ N^+ .

$S_1 = a_1$;	$a_1 = S_1$
$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$	$a_2 = S_2 - S_1$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$	$a_3 = S_3 - S_2$
.....	
$S_{n-1} = S_{n-1} + a_{n-1}$	$a_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2}$
$\mathbf{S_n = S_{n-1} + a_n}$	$\mathbf{a_n = S_n - S_{n-1}}$, gdy n>=2

$\mathbf{a_n = S_n - S_{n-1}}$

Sposoby określenia ciągu

- podanie wyrazu ogólnego na **n**-ty wyraz ciągu, *np.* *$a_n = 4*n +3$*
- podanie wszystkich wyrazów ciągu, jeżeli jest to ciąg skończony, np. *(7, 11, 15, 19, 23…)*
- podanie wzoru na sumę jego n początkowych wyrazów , np. *$S_n = 4*(1+2+…n) +3*n = n*(2n+5)$*
- podanie jego pierwszego wyrazu lub kilku początkowych wyrazów i reguły wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu w zależności od poprzednich – **definicja rekurencyjna ciągu**.

np. *$\{ a_1=7;\ a_{n+1} = a_n + 4$*

Przykłady ciągów określonych wzorem rekurencyjnym i wzorem ogólnym - zamiana:

Rekurencyjnie: { $a_1=7;\ \{ a_{n+1} = a_n + 4$ → Wzór ogólny: $a_n = 4*n + 3$

Rekurencyjnie: { $a_1 = -10;\ a_{n+1} = a_n + 9$ → Wzór ogólny: $a_n = 9n – 19$

Wzór ogólny: $a_n = n^2-2$ Wzór rekurencyjny ciągu (a_n): $\{ a_1 = -1;\ a_{n+1} = a_n + 2n +1;\ n \in N^+$

Ciąg Fibonacciego:

Ciąg liczbowy Fibonacciego – ciąg liczb naturalnych określony rekurencyjnie w sposób następujący:

$a_1= 1;\ a_2 = 1;\ a_3 = 2;\ a_4 = 3;\ a_5 = 5;\ a_6 = 8;\ a_7 = 13;\ \dots\ a_n = a_{n-2}\ a_{n-1}$ *dla n >=2*

$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2;\quad a_4 = a_2 + a_3 = 1+2 =3;\ a_5 = a_3+ a_4 = 2+3=5$ itd.

http://www.math.edu.pl/narzedzia.php?opcja=ciag-fibonacciego

Spośród wszystkich ciągów liczbowych, które występują, jeden jest szczególnie interesujący.
Ciąg ten zawdzięcza swoją nazwę matematykowi z Pizy,
Leonardowi, który pod nazwiskiem Fibonacci wydał w 1202 roku słynną księgę Liber Abaci.
Ojciec Leonarda nosił przydomek Bonacci, stąd syn został Fibonaccim (*filius Bonacci* - syn dobrotliwego)
Liczby naturalne tworzące ciąg o takiej własności, że kolejny wyraz (z wyjątkiem dwóch pierwszych) jest sumą dwóch poprzednich nazywa się liczbami Fibonacciego i pojawiają się w tak wielu sytuacjach, że wydaje się to niemożliwe.

Podstawowy ciąg liczb Fibonacciego to: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...
Każda liczba w ciągu jest sumą dwóch poprzednich (poza pierwszą i drugą).
Mamy tu do czynienia z ciągiem rekurencyjnym.
Ciąg liczbowy Fibonacciego jest pierwszym ze znanych ciągów tego rodzaju.

W wyniku podzielenia każdej z liczb ciągu przez jej poprzednik otrzymuje się iloraz oscylujący wokół 1,618 - liczby złotego podziału.
W miarę zwiększania się liczb zmniejszają się odchylenia od tej wartości.
Dokładna wartość granicy jest złotą liczbą: Φ=5√+12=1,6180339887498948482...

Liczby Fibonacciego można wyznaczyć ze wzoru:

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots$$

Liczby Fibonacciego są więc sumami liczb z przekątnych w trójkącie Pascala.

Ciąg Fibonacciego można odnaleĽć w wielu aspektach przyrody, ciąg taki opisuje np. liczbę pędów rośliny jednostajnie przyrastającej w latach.
W słoneczniku możemy zaobserwować dwa układy linii spiralnych, wychodzących ze środka.
Liczba linii rozwijających się zgodnie z ruchem wskazówek zegara wynosi 55 i tylko 34 skręconych w przeciwną stronę.
Takie same spirale można zaobserwować na wielu innych roślinach (np. kalafior, ananas).
Liczby spiral występujących w tych roślinach są kolejnymi liczbami Fibonacciego.

Złotymi proporcjami wyznaczonymi na podstawie ciągu Fibonacciego posługiwał się w swoim malarstwie Leonardo da Vinci i Botticelli.
W XX wieku ciąg Fibonacciego stosowany był także przez niektórych kompozytorów do proporcjonalnego porządkowania rytmu lub harmonii.
Na ciągu Fibonacciego zbudowane jest między innymi Trio klarnetowe Krzysztofa Meyera.
Złote proporcje wykorzystano także podczas wznoszenia piramidy Cheopsa w Gizie i Partenonu w Grecji.

Ciąg arytmetyczny

Wśród ciągów liczbowych wyróżniamy ciągi arytmetyczne i geometryczne

Ciąg arytmetyczny – różnica dwóch kolejnych wyrazów jest stała
$r = a_{n+1} - a_n$ **$a_{n+1} = a_{n+r}$**

Np. (5, 15, 25, 35, 45 ...) (a1, (a1+r), (a1+2r), (a1+3r), ...)
$a_2 = a1 + r$, $a3 = a_2 + r$, ... $a_{n+1} = a_n + r$

Definicja ciągu arytmetycznego

Ciąg arytmetyczny – ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego tej samej liczby **r**, zwanej różnicą ciągu arytmetycznego.

a1 → + r → a2 → +r → a3 → + r → a4 → +r ...

Ciąg (an) jest ciągiem arytmetycznym

gdy **$a_{n+1} = a_n + r$** ; $n \in N^+$, $r \in R$

W ciągu arytmetycznym (a_n) różnica **r** jest określona wzorem:
$r = a_{n+1} - a_n$, gdzie $n \in N^+$,

Monotoniczność ciągu arytmetycznego zależy od różnicy **r** tego ciągu.
Jeżeli różnica **r** jest liczbą dodatnią, to ciąg arytmetyczny jest ciągiem rosnącym;
jeśli **r** jest liczbą ujemną, ciąg arytmetyczny jest ciągiem malejącym;
jeśli **r = 0** to ciąg arytmetyczny jest ciągiem stałym.

***Wykresem ciągu arytmetycznego* (an)** jest zbiór odosobnionych punktów **(n, a_n)**, gdzie $n \in N^+$, leżących na prostej o równaniu **$y = a_n$**

Ciąg arytmetyczny można określić wzorem rekurencyjnym:

{ **$a_1 = a$** , gdzie a - pierwszy wyraz ciągu
{ **$a_{n+1} = a_n + r$**, gdy $n \in N^+$ r - różnica ciągu arytmetycznego

Procent prosty

Procent prosty to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K, polegający na tym, że dochód w postaci odsetek nie jest doliczany do wkładu i nie procentuje wraz z nim w następnym okresie oszczędzania

K – wkład pieniężny (kapitał początkowy włożony)
p – stopa oprocentowania w każdym z okresów
$K_0 = K$, K_1, K_2, K_3, … K_n – wyrazy ciągu arytmetycznego o różnicy **r**, gdzie
$r = p/100 * K$
$K_n = K*(1+n*p/100)$, np. $K_3 = K*(1+3*p/100)$
$K_{n+1} = K_n + p/100*K$
K → + r → K1 → +r → K2 → … +r → Kn
K1 = K*(1 + p/100)
K2 = K*(1 + 2*p/100)
K_n – $K*(1 + n*p/100)$

Wzory dotyczące ciągu arytmetycznego

Dla ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie **a_1** i różnicy **r**, wzór ogólny ma postać:
$a_n = a_1 + (n-1)*r$, $n \in N^+$

Stąd:
$r = (a_n - a_1) / (n-1)$
$a_1 = a_n - (n-1)*r$
$n - 1 = (a_n - a_1)/r$ → **$n = (a_n - a_1)/r + 1$**

Jeżeli **(an)** jest ciągiem arytmetycznym, to każdy wyraz z wyjątkiem pierwszego i ostatniego (jeśli ciąg jest skończony) jest średnią arytmetyczną wyrazów z nim sąsiadujących:
$a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) / 2$

Ciąg **(an)** jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n, nie mniejszej niż 2, spełniony jest warunek:
$a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) / 2$

Obliczenie r na podstawie dowolnych 2 wyrazów ciągu

Dane
a_k, a_m (k > m)
Stąd:
$a_k = a_1 + (k-1)*r$
$a_m = a1 + (m-1)*r$

$a_k - a_m = (k-1)*r - (m-1)*r = r*(k-1 - m + 1) = r*(k-m)$
$(k-m)*r = a_k - a_m$
$a_k - a_m = (k - m)*r$
$r = (a_k - a_m)/(k-m)$

Dwa dowolne wyrazy
$a_k = a_m + (k - m) * r$ np. $a_{20} = a_{10} + (20-10)*r$
stąd:
$r = (a_k - a_m) / (k - m)$ np. $r = (a_{20} - a_{10}) / (20 - 10)$
$a_m = a_k - (k - m) * r$ np. $a_{10} = a_{20} - (20-10)*r$
$k - m = (a_k - a_m) / r$ np. $20 - 10 = (a_{20}-a_{10})/r$

Liczby naturalne - dzielenie przez liczbę naturalną i reszta – ciąg arytmetyczny

Liczby naturalne **a_n**, które przy dzieleniu przez liczbę naturalną **k** dają resztę **p**,
tworzą ciąg arytmetyczny **(a_n)** o wyrazie **$a_n = k*n + p$**
Na przykład:
$a_n = 3n+1$, to $(an) = (4, 7, 10, 13, \dots)$
$a_n = 4n + 3$ to $(an) = (7, 11, 15, 19, \dots)$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$S_n = a_1 + a_2 + \dots a_n$
Przykład:
$(an) = (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25)$
Wyznaczyć sumę wyrazów **$a_k + a_{10-k}$**, gdy $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$k = 1$, $a1 + a9 = 1 + 25 = 26$
$k = 2$, $a2 + a8 = 4 + 22 = 26$
$k = 3$, $a3 + a7 = 7 + 19 = 26$
$k = 4$, $a4 + a6 = 10 + 16 = 26$
$k = 5$, $a5 + a5 = 13 + 13 + 26$
$a_k + a_{10-k} = 26$

Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to

$a_1 + a_n = a_k + a_{n+1-k}$, gdzie $0 < k <= n$
$a_{n-k} + a_{n+k} = 2*a_n$, gdzie $0 < k < n$

Suma n początkowych, kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego wyraża się wzorem:

$S_n = (a_1 + a_n)/2 * n = (2*a_1 + (n-1)*r)/2 * n$, $n \in N^+$
$S_n = n*(a_1+an)/2 = n/2 * [2*a_1 + (n-1)*r]$

$S_n^k = (a_k + a_n) /2 * (n - k + 1)$ - **suma od wyrazu k do wyrazu n**

Przykłady sum początkowych liczb naturalnych

Suma początkowych n liczb naturalnych
$1 + 2 + 3 + \dots + n = \Sigma k$; $(k= 1\dots n)$ = **$n*(n+1)/2$**
Suma początkowych n liczb parzystych

$2 + 4 + 6 + ... + 2n = \Sigma 2k$; (k= 1...n) = **n*(n+1)**
Suma początkowych n liczb nieparzystych
$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = \Sigma(2k-1)$; (k= 1...n) = $\mathbf{n^2}$

Podsumowanie – wzory dla ciągu arytmetycznego

$a_{n+1} = a_n + r$
$r = a_{n+1} - a_n$
$a_n = a_1 + (n-1)*r$
$a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) / 2 = (a_{n-k} + a_{n+k}) / 2$
$S_n = (a_1 + a_n)/2 * n = ((2*a_1 + (n-1)*r)*n / 2$
$S_n^k = (a_k + a_n) /2 * (n – k + 1)$ - ***suma od wyrazu k do wyrazu n***

$r = (a_n – a_1) / (n-1)$
$r = (a_k – a_m)/(k-m)$

$r = (2*S_n – 2*a_1*n) / ((n*(n-1))$
$r = (2* (S_n*m – S_m*n)) / ((n-m)*m*n)$

Ciąg geometryczny

Iloraz q dwóch kolejnych wyrazów ciągu jest stały

(1, 2, 4, 8, 16, ...) $(a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, ... a_1q^{n-1})$
$a_n = a_1*q^{n-1}$
$q = a_{n+1} / a_n$, gdy $a_n \neq 0$ dla n = 2, 3, ...

Dowolny wyraz
$|a_n| = \sqrt{(a_{n-1} * a_{n+1}}$; n > 1 tj. średnia geometryczna

n-ty wyraz
$a_n = a_1*q^{n-1}$ np. $a_6 = a_1*q^5$

Dowolne wyrazy (s >=r)
$a_s = a_r*q^{s-r}$ np. $a_{10} = a_6*q^4$

Ciąg geometryczny (an) – ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy,
w którym każdy wyraz, oprócz drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego
przez tę samą liczbę **q**, zwaną ilorazem ciągu geometrycznego.

$a_1 \rightarrow *q \rightarrow a_2 \rightarrow *q \rightarrow a_3 \rightarrow *q \rightarrow a_4 \rightarrow *q \rightarrow a_5 \rightarrow *q ...$
$a_2 = a1*q$; $a_3=a1*q^2$ $a_4=a_1*q^3$; $a_n = a_1*q^{n-1}$
$q = a_2/a_1 = a_3/a2 = a_4/a_3 = ... = a_{n+1} / a_n$

Przykład:

$(a_n) = (9, 3, 1, 1/3, 1/9, ...)$ $q = 3/9 = 1/3$

$a_n = a_{n-1} * q = a_1 * q^{n-1}$

Jeżeli ciąg (an) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to n-ty wyraz ciągu określony jest wzorem:
$a_n = a_1 * q^{n-1}$

Ciąg geometryczny można określić wzorem rekurencyjnym:

{ **$a_1 = a$** gdzie a – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego
{ **$a_{n+1} = a_n * q$**, gdy $n \in N^+$ q – iloraz ciągu geometrycznego

Procent składany – sposób oprocentowania wkładu pieniężnego **K**, polegający na tym, że dochód w postaci odsetek jest doliczany do wkładu
i procentuje wraz z nim w następnym okresie oszczędzania.
K → ***q** → K1 → ***q** → K2 → … ***q** → **Kn**
$K1 = K*q$ **$K2 = K*q^2$** **$Kn = K*q^n$**, gdzie K –kapitał początkowy

Jeżeli w ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie **q**
$a1 \neq 0$ i $q \neq 0$, to $q = a_{n+1} / an$
$a1 \neq 0$ I $q = 0$, to $a2 = 0, a3 = 0, \dots an = 0$
$a1 = 0$ I $q \neq 0$, to $a2 = 0, a3 = 0, \dots an = 0$

Ciąg naprzemianległy

Ciąg geometryczny (a_n) , w którym **$a1 \neq 0$** i **$q < 0$**, jest ciągiem naprzemianległym,
gdy jego kolejne wyrazy są na przemian dodatnie i ujemne,
czyli każde 2 kolejne wyrazy mają przeciwne znaki.

Zależności a i q

Z definicji ciągu geometrycznego wynika:
$a_n*q = a_{n+1}$; $a_n*q_2 = a_{n+2}$; $a_n*q_k = a_{n+k}$
$a_n/q = a_{n-1}$; $a_n/q^2 = a_{n-2}$; $a_n/q^k = a_{n-k}$

$a_n/q^k = a_{n-k}$ **$a_n*q_k = a_{n+k}$**

Ciąg (an), gdzie n ∈ N+ jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy

$a_n^2 = a_{n-1} * a_{n+1}$, gdzie n>=2
$a_n^2 = a_{n-k} * a_{n+k}$, gdzie n>=2

W ciągu geometrycznym o wyrazach *dodatnich* każdy wyraz **a_n**, oprócz pierwszego i ostatniego,
jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich
$a_n = \sqrt{}(a_{n-1} * a^{n+1})$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$S_n = a1 + a^1*q + a_1*q^2 + \dots a_1*q^{n-1} = a_1*(1 + q + q^2 + \dots q^{n-1})$

$Sn = a_1 * (1-q^n)/(1-q)$ gdy $q \neq 1$
$S_n = n*a_1$, gdy $q = 0$

Wygodniej stosować wzór:
$Sn = a_1 * (1-q^n)/(1-q)$ gdy $-1 < q < 1$
$S_n = a_1 * (q^n - 1) / (q-1)$ gdy $q < -1$ lub $q > 1$

Jeżeli **(an)** jest ciągiem geometrycznym o ilorazie **q** i **Sn** jest sumą **n** początkowych jego wyrazów, to
$q = (S_n - a_1) / (S_n - a_n)$, gdzie $n > 1$

Wzory dla ciągu geometrycznego – podsumowanie

$a_n = a_1 * q^{n-1}$
$q = a_{n+1} / a_n$, gdy $a_n \neq 0$ dla n = 2, 3, ...

$q = \sqrt[(n-1)]{(an/a1)} = (an/a1)^{1/(n-1)}$ (pierwiastek stopnia (n-1) z ilorazu a_n podzielone a_1

Dowolny wyraz
$|a_n| = \sqrt{(a_{n-1} * a_{n+1}}$; $n > 1$ tj. średnia geometryczna

Dowolne wyrazy (s >=r)
$a_s = a_r * q^{s-r}$

$a_n / a_{n-k} = q_k$ gdzie $k < n$
$a_n / a_k = q^{n-k}$

$a_n^2 = a_{n-1} * a_{n+1}$ $a_n = \sqrt{(a_{n-1} * a_{n+1})}$, gdy a_i dodatnie
$a_n^2 = a_{n-k} * a_{n+k}$

$a_n * q^k = a_{n+k}$, gdzie $k \in N^+$

$q^{m-n} = a_m / a_n$
$q^{n-k} = a_n / a_k$

$q_k = a_{n+k} / a_n$

$a_n/q^k = a_{n-k}$
$a_n/a_k = q^{n-k}$

$Sn = a_1 * (1-q^n)/(1-q) = a_1 * (q^n - 1) / (q - 1)$, gdy $q \neq 1$
$S_n = n * a_1$, gdy $q = 1$

$q = (S_n - a_1) / (S_n - a_n)$, gdzie $n > 1$