TRANSFORMACJA WSPÓŁRZĘDNYCH

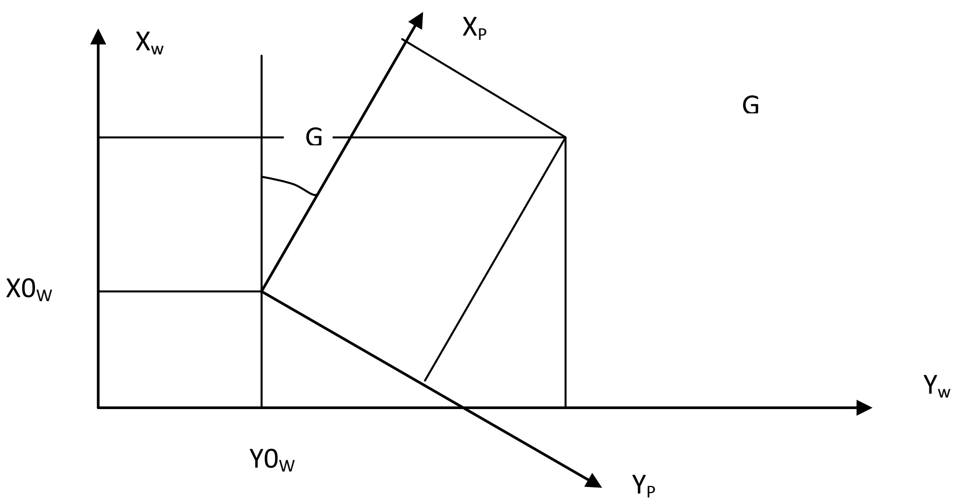
I. Metody transformacji:

Transformacja **izometryczna** - sztywne ruchy płaszczyzny, przez obrót i przesunięcie.
Transformacja **Helmerta** (liniowa transformacja konforemna przez podobieństwo) - (ang. similarity transformation) – realizuje obrót, przesunięcie i dodatkowo przeskalowuje współrzędne układu pierwotnego.
W algorytmie transformacji **Helmerta** występuje współczynnik skali jeden dla całego rozpatrywanego obszaru.
Transformacja **afiniczna** – affine transformation.
Transformacje afiniczne przekształcają proste i płaszczyzny na proste i płaszczyzny, zachowując równoległość prostych nie zachowują kątów, zmieniają skalę osi współrzędnych X i Y.
Transformacja ta nie jest jednak konforemna i dlatego długości i kąty w układzie współrzędnych przeliczonych mogą ulegać zmianom.
Transformacje **wielomianowe** afiniczne (ogólne) dają bardzo dobre wyniki przy kalibracji obrazów rastrowych.
Transformacja afiniczna zmienia geometrię sieci, na rzecz minimum odchyłek na punktach dostosowania.

II. Przeliczenie współrzędnych prostokątnych z jednego układu prostokątnego na drugi układ prostokątny.

1. **Przeliczenie współrzędnych przy 2 punktach dostosowania**

Stosuje się dla mniejszych obszarów, które można przyjąć za płaskie



$$\mathbf{x_W = x0_W + x_P*cos(G) - y_P*sin(G)}$$
$$\mathbf{y_W = y0_W + y_P*cos(G) + x_P*sin(G)}$$

G – gamma – kąt skrętu układu pierwotnego względem wtórnego
$x0_W$, $y0_w$ – współrzędne początku układu pierwotnego w układzie wtórnym
Jeżeli występuje niezgodność długości to należy uwzględnić współczynnik redukcji $r = d_W/d_P$

$x_W = x0_W + x_P*r*cos(G) - y_P*r*sin(G)$ (1)
$y_W = y0_W + y_P*r*cos(G)+x_P*r*sin(G)$
oznaczając r*cos(G)=v oraz r*sin(G)=u
$x_W = x0_W + v*x_P - u*y_P$
$y_W = y0_W + v*y_P + u*x_P$

Jeśli są przynajmniej 2 punkty o danych współrzędnych – punkty dostosowania to:
r=sqrt(dxw^2+dyw^2)/sqrt(dxp^2+dyp^2)
tg(G) = tg(Aw-Ap) = (tg(Aw)-tg(Ap))/(1+tg(Aw)*tg(AP)) = **(dxp*dyw-dyp*dxw)/(dxp*dxw+dyp*dyw)**
w formie rachunkowej

$$f = \quad tg(G) = \begin{vmatrix} dxp & dyp \\ dxw & dyw \end{vmatrix}_0 \qquad tg(G) = f1/f2 = f_0$$

Współrzędne wtórne <u>początku układu pierwotnego</u> można wyznaczyć po przekształceniu wzoru (1)
$x0_W = x_W - x_P*r*cos(G) + y_P*r*sin(G)$
$y0_W = y_W + y_P*r*cos(G) - x_P*r*sin(G)$
dxw = dxp*cos(G) - dyp*sin(G)
dyw = dyp*cos(G) + dxp*sin(G)
Uwzgledniając współczynnik r oraz oznaczając r*cos(G)=v oraz r*sin(G)=u
dxw = dxp*r*cos(G) - dyp*r*sin(G) = v*dxp – u*dyp
dyw = dyp*r*cos(G) + dxp*r*sin(G) = v*dyp + u*dxp

Wzory te można zapisać w postaci symboli rachunkowych prof. Hausbrandta:

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} dxp & dyp \\ u & v \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} &\mathbf{dxw=F1 = v*dxp - u*dyp} \\ &\mathbf{dyw=F2 = u*dxp + v*dyp} \end{aligned}$$

Współczynniku u i v można obliczyć stosując formy Hausbrandta

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} dxp & dyp \\ dxw & dyw \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} &\mathbf{u=f^{[1]}} \\ &\mathbf{v=f^{[2]}} \end{aligned}$$

2. Transformacja współrzędnych przy więcej niż 2 punktach dostosowania – wzory Hausbrandta

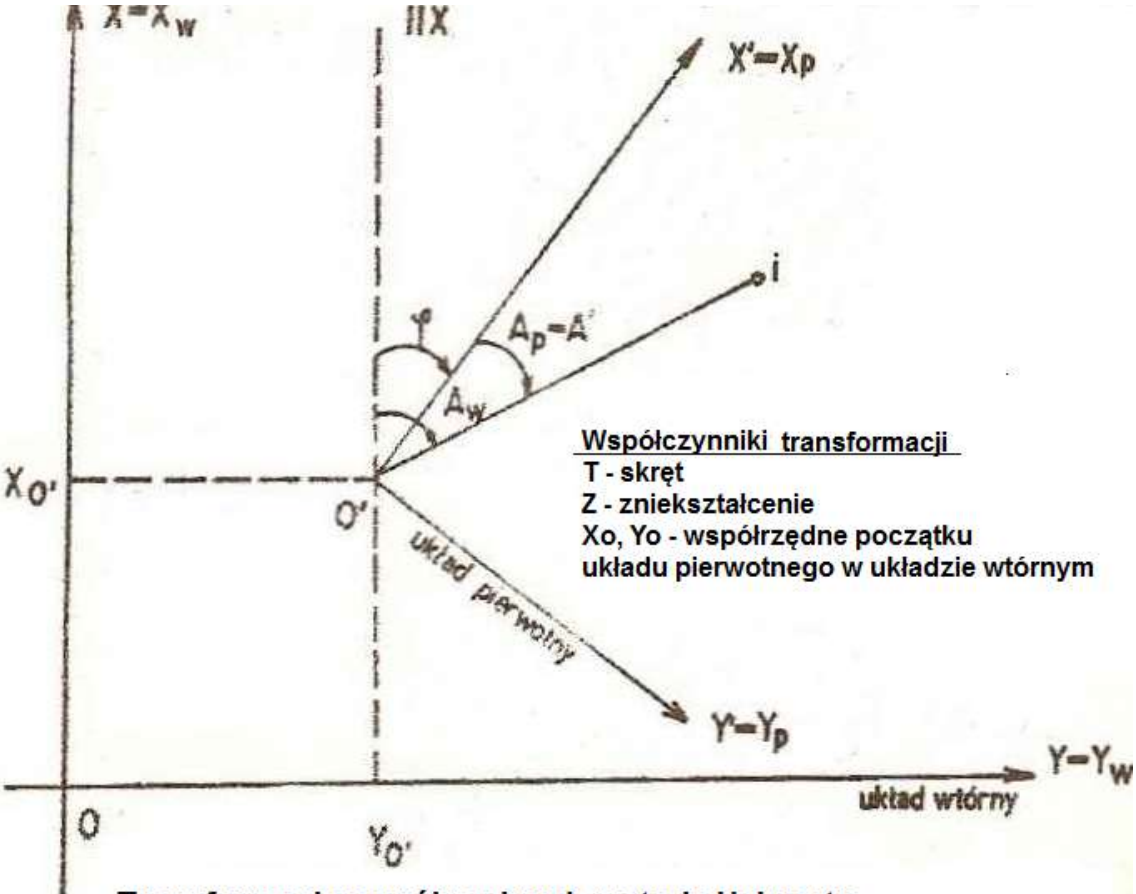
Jeśli jest n>2 punktów dostosowania to tworzymy tzw. **biegun przekształcenia**,
którego współrzędne są średnimi arytmetycznymi wszystkich współrzędnych punktów dostosowania w obu układach.
<u>Współrzędne bieguna:</u>
$x0_P = [x_P]/n \quad y0_P=[y_P/n$
$x0_W = [x_W]/n \quad y0_W=[y_W/n$

Współczynniki przekształcenia u i v liczy się na podstawie współrzędnych bieguna i każdego z punktów dostosowania:

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{dx}01_P & \mathbf{dy}01_P & \mathbf{dx}02P & \mathbf{dy}01_P & \ldots & \mathbf{dx}0n_P & \mathbf{dy}0n_P \\ \mathbf{dx}01_W & \mathbf{dy}01_W & \mathbf{dx}02_W & \mathbf{dy}01_W & \ldots & \mathbf{dx}0n_P & \mathbf{dy}0n_P \end{vmatrix}$$

$\mathbf{u} = \mathbf{F}^{[1]} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{F}^{[2]}$
Jest to transformacja **Helmerta** w ujęciu prof. Hausbrandta.

3. Transformacja współrzędnych płaskich metodą Helmerta – współczynniki Xo, Yo, Z, T



Transformacja współrzędnych metodą Helmerta

Transformacja współrzędnych płaskich metodą Helmerta jest często stosowaną w praktyce,
m.in. ze względu na wygodny sposób obliczeń, w którym przy następnych masowych obliczeniach nie trzeba już podawać punktów dostosowania a wykorzystuje się określone współczynniki.

W celu uzyskania wymaganej dokładności transformacji praktyczny jest iteracyjny sposób obliczeń współczynników z kolejnym odrzuceniem punktów o największych odchyłkach liniowych aż do osiągnięcia zadanego błędu transformacji.

Na podstawie wyznaczonych w ten sposób **współczynników transformacji**:
skrętu T,
zniekształcenia Z
i współrzędnych Xo, Yo początku układu pierwotnego w układzie wtórnym,
można obliczyć kąt skrętu **Fi** i współczynnik skali **q** ze wzorów:

Fi= arc ctg (T/(1+Z)

q=sqrt((1+Z)^2 + T^2) = (1+Z)/cos(Fi) = T/sin(Fi) gdzie:

Fi=A-A' – różnica azymutów w układzie wtórnym XY i pierwotnym X'Y'

q=s/s' – stosunek długości w układzie wtórnym s i pierwotnym s'

Współczynniki T, Z, Xo, Yo pozwalają wykonywać przeliczenia z układu pierwszego (pierwotnego) X'Y' na układ drugi (wtórny) X,Y według wzorów:

X=Xo+(1+Z)*X' – T*Y'

Y=Yo+(1+Z)*Y'+T*X'

Chcąc wykonać przeliczenia *z* układu drugiego XY na układ pierwszy X'Y'
przy znajomości współczynników transformacji z układu pierwszego na drugi
można postąpić dwojako:

a) <u>zastosować zmienione wzory transformacji:</u>

X' = ((1+Z)*(X-Xo) +T*(Y-Yo)) / ((1+Z)^2 + T^2)

Y' = ((1+Z)*(Y-Yo) -T*(X-Xo)) / ((1+Z)^2 + T^2)

b) <u>obliczyć odwrotne współczynniki transformacji i stosować zwykłe wzory</u>:

T ' = - T / ((1+Z)^2 + T^2)

Z ' = (1+Z) / ((1+Z)^2 + T^2) – 1

X ' = (- 1 + Z) * (Xo – T*Yo)) / ((1+Z)^2 + T^2)

Y ' = (- 1 + Z) * (Yo + T*Xo)) / ((1+Z)^2 + T^2)

X ' = Xo + (1+Z')*X – T'*Y

Y ' = Yo + (1+Z')*Y +T'*X

Z obliczonych wartości **T', Z', Xo', Zo'** można obliczyć analogicznie **Fi'** i **q'**

Fi'= arc ctg (T'/(1+Z')

q'=sqrt((1+Z')^2 + T'^2) = (1+Z')/cos(Fi') = T'/sin(Fi')

Współczynniki Fi' i **q'** związane są z Fi i q następującymi zależnościami:

Fi' = 400[grad] – Fi

q' = 1/q

Jeśli nie są znane bezpośrednie współczynniki do przeliczenia współrzędnych
z układu I na układ III, a znane są współczynniki pośrednie między układami I i II
oraz II i III
to można obliczyć współczynniki wypadkowe.

Współczynniki wypadkowe można obliczyć też dla większej ilości współczynników pośrednich.

Wyznaczenie współczynników transformacji T, Z, X0, Y0 na podstawie punktów dostosowania:

Oznaczenia: X1, Y1 – współrzędne w układzie pierwotnym, X2, Y2 – we wtórnym
Obliczenie sum i średnich współrzędnych – współrzędnych bieguna w obu układach
sx1=[X1] - suma X – układ pierwotny
sy1=[Y1] - suma Y– układ pierwotny
sx2=[X2] - suma X – układ wtórny
sy2=[Y2] - suma Y – układ wtórny

Średnie współrzędne bieguna - środka ciężkości układu. pierwotnego
x1s=sx1/m; y1s=sy1/m; // m – ilość punktów dostosowania
Średnie współrzędne bieguna - środka ciężkości układu. wtórnego
x2s=sx2/m; y2s=sy2/m; // m – ilość punktów dostosowania

Przyrosty względem bieguna układ pierwotny
dx1=x1 - x1s; dy1=y1 - y1s
Przyrosty względem bieguna układ wtórny
dx2=x2 - x2s; dy2=y2-y2s

Obliczenie sum:

```
s1=s1+dx1*(dy2-dy1);          // s1=[dx1*(dy2-dy1)]
s2=s2+dy1*(dx2-dx1);          // s2=[dy1*[dx2-dx1]
sm=sm+dx1*dx1+dy1*dy1;        // sm=[dx1^2*dy1^21]
s3=s3+dx1*(dx2-dx1);          // s3=[dx1* (dx2-dx1)]
s4=s4+dy1*(dy2-dy1);          // s4=[dy1*[dy2-dy1]
sdx1=sdx1+dx1;                // [dx1]
sdy1=sdy1+dy1;                // [dy1]
sdx2=sdx2+dx2;                // [dx2]
sdy2=sdy2+dy2;                // [dy2]
```

Współczynniki transformacji: T1, Z1, X01, Y01
T1 = (s1 – s2) / sm;
Z1 = (s3 + s4) / sm;
X01 = x2s – x1s + y1s*t1 – x1s*z1;
Y01 = y2s –y1s – x1s*t1 – y1s*z1;

<u>Przeliczenie współrzędnych</u>
X3 = X1 – Y1*T1 + X1*Z1 + X01 = X01 + (1+Z1)*X1 – T1*Y1
Y3 = Y1 + X1*T1 + Y1*Z1 + Y01 = Y01 + (1+Z1)*Y1 + T1*X1

Przy transformacji współrzędnych należy uwzględnić ewentualne błędy punktów dostosowania – najlepiej iteracyjnie eliminować punkty, które powodują przekroczenie założonego błędu średniego transformacji.

4. Transformacja afiniczna

Stanowi jedno z zastosowań przekształcenia afinicznego (kolinearnego) i polega na przeliczeniu współrzędnych punktów z układu pierwotnego na wtórny przy założeniu, że współrzędne C, Y w układzie wtórnym s a funkcjami liniowymi współrzędnych pierwotnych x, y.

X = a1*x + b1*y + c1

Y = a2*x + b2*y + c2

Podobne jak w metodzie Helmerta zakłada się niezmienność współrzędnych punktów dostosowania. Transformacja ta nie jest jednak konforemna i dlatego długości i kąty w układzie współrzędnych przeliczonych mogą ulegać zmianom.

Wyznaczenie wartości 6 współczynników transformacji: a1, a2, a3, b1, b2, b3 wymaga 3 punktów dostosowania.

Transformacjami afinicznymi nazwano przekształcenia reprezentujące przesunięcie, obrót i skalowanie.

Jest to jednoznaczne przekształcenie płaszczyzny lub przestrzeni na siebie, zachowujące współliniowość punktów.

Przykładami przekształceń afinicznych są izometria, podobieństwo i powinowactwo osiowe.

Transformacja afiniczna jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym prostej w prostą, płaszczyzny w płaszczyznę i przestrzeni w przestrzeń.

Przekształcenie to zachowuje na płaszczyźnie stosunek długości boków odcinków a w przestrzeni stosunki pól figur leżących na płaszczyznach równoległych.

Znaczy to, iż linie równoległe i środki odcinków transformacja ta zachowuje, zmieniane są natomiast długości odcinków i wartości kątów.

Zapisano równanie transformacji afinicznej w notacji macierzowej

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+c \\ dx+ey+f \end{bmatrix}$$

W równaniu *a, b, c, d* są odpowiedzialne za obrót, *c i f* natomiast to przesunięcie o wektor.

Transformacje afiniczne przekształcają proste i płaszczyzny na proste i płaszczyzny, zachowując równoległość prostych nie zachowują kątów, zmieniają skalę osi współrzędnych X i Y.

$$X_w = a_1 X_p + b_1 Y_p + c_1$$

$$Y_w = a_2 X_p + b_2 Y_p + c_2$$

X_w, Y_w - układ wtórny (np. mapy numerycznej)

X_p, Y_p - układ pierwotny (np. mapy rastrowej)

a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 - współczynniki transformacji

$a_1 = k_X \cos\gamma_X$, $b_1 = -k_Y \sin\gamma_Y$,

$a_2 = k_X \sin\gamma_X$, $b_2 = k_Y \cos\gamma_Y$,

$X_0 = c_1$, $Y_0 = c_2$.

k_X = sqrt(b1*b1+b2*b2) k_Y =sqrt(a1*a1+a2*a2)   - współczynniki skali

γ_X =arctan(b1/b2); γ_Y =arctan(a2/a1)   – kąty obrotu

5. Transformacje wielomianowe

Wielomianowe odwzorowania wiernokątne (transformacje afiniczne wyższych rzędów) stosowane są zazwyczaj do odwzorowania dużych obszarów o zmiennych skalach i skręceniach.

X = a0 + a1*x + a2*y + a3*x*y +a4 *x^2 + a5*y^2 + …

Y = b0 + b1*x + b2*y + b3*x*y +b4 *x^2 + b5*y^2 + …

III. Popularne programy komputerowe do obliczeń transformacji

Dokonanie obliczeń transformacji możliwe jest w większości komputerowych programów geodezyjnych, np. **C-Geo, Winkalk i Geonet_unitrans**.

W programie **C-Geo** moduł <u>Transformacja w współrzędnych</u> umożliwia transformację **Helmerta** i **afiniczną**. Wyboru dokonuje się przez wybór ikony H lub A.

W metodzie Helmerta potrzebne jest wprowadzenie minimum 2 punktów dostosowania a w metodzie afinicznej 3 punktów.

Program **GEONET**_unitrans autorstwa prof. R. Kadaja służy głównie do przeliczeń współrzędnych między układami na obszarze całej Polski, pozwala wyznaczać parametry transformacji dla układów lokalnych oraz przeliczać wysokości elipsoidalne na normalne.

Są też specjalne dodatki – 3 moduły: programy obliczeniowe sieci GPS, konwersja map numerycznych dla MicroStation, konwersja map numerycznych dwg dla AutoCAD.

Moduł **UNITRANS** umożliwia przeliczenie współrzędnych miedzy różnymi układami:

1965 – strefy 1, 2, 3, 4, 5. Strefy 1-4 dotyczą odwzorowania quasi stereograficznego, a strefa 5 – Gaussa-Krugera.

1942 - odwzorowania Gaussa-Krugera w pasach południkowych 3 lub 6 – stopniowych. Pasy 3-stopniowe obejmują 4 strefy z południkami środkowymi 15^0, 18^0, 21^0 i 24^0 a6-stopniowe 2 strefy z południkami 15^0 i 21^0.

1992 – nowy jednostrefowy układ dla Polski – odwzorowanie Gaussa-Krugera elipsoidy GRS-80 z południkiem środkowym 19 stopni i skalą na tym południku m=0,9992

2000 – nowy 4-stopniowy układ odwzorowania elipsoidy GRS-80, utworzony analogicznie jak układ 1942 dla pasów 3-stopniowych.

BLh | GRS-80 – układ współrzędnych geograficznych – geodezyjnych na elipsoidzie GRS-80.

BLH | Krasowski - układ współrzędnych geograficznych – geodezyjnych na elipsoidzie Krasowskiego.

UTM – międzynarodowy (wojskowy, nawigacyjny) układ współrzędnych powstały poprzez odwzorowania Gaussa-Krugera, elipsoidy GRS-80 w pasach 6-stopniowych ze skalą na każdym południku środkowym m=0,9996.

GUGiK-80 – jednostrefowy dla Polski układ kartograficzny dla map przeglądowych 1:100000 lub mniejszych, powstały przez odwzorowania quasi stereograficzne elipsoidy Krasowskiego.

Układy lokalne, np. KRAKÓW, ŁÓDŹ.